ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.
Das Kakoxen;
oryktognostisch dargestellt von
Dr. *Johann Lhotsky*.

Herr Professor *Steinmann* in Prag hat in den Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (neue Folge, Vol. 1.) ein neues Mineral aufgestellt, über dessen chemische und systematische Verhältnisse er daselbst Mehreres angeführt hat. Mittlerweile wurde dieses Mineral (über dessen früheres Einbrechen nichts Sicheres bekannt ist, das aber dermal in Böhmen nicht mehr vorkommt) von bedeutenden Personen aus England, Preufsen etc. in seinem primitiven Fundorte (Grube Hrbek, Schichtamt Straschitz in Böhmen) aufgesucht und gesammelt, später auch in Baiern gefunden, so dafs es dermal als ziemlich verbreitet und bekannt (wenn auch nicht gekannt) anzusehen ist. — Als ich mich im Winter 1828 in Böhmen befand, wurde mir an Ort und Stelle eine Kiste von einigen zwanzig gewählten und ausgezeichneten Musterstücken zu Theil, wie sie vereint in keiner Sammlung vorhanden seyn dürften. Alle diese Stücke wurden nun zu jener Arbeit benützt und verwendet, die ich dermal dem Publikum mittheile.

Der thonige Brauneisenstein, in welchem das Kakoxen vorkommt, bildet ungeheure Lager, welche an vie-

len Orten die Grauwackenformation des Berauner und Pilsner Kreises in Böhmen durchziehen. Dieser Brauneisenstein ist hier häufig zerklüftet; diese Zerklüftungen sind meistens 1—4'' lang, 3—6''' hoch, und haben gewöhnlich dieselbe Richtung. In diesen findet sich nun das Kakoxen, jedoch sehr selten auf dem Muttergestein selbst, sondern auf einer Kruste von Glaskopf, welche diese Zerklüftungen zu allererst auskleidet.

Die Grundgestalt (Individualität), in der wir das Kakoxen in vielen unserer Stücke vorkommen sehen, ist eine sechsseitige Säule mit einer sechsseitigen aufgesetzten Endpyramide, deren Aufriſs und Durchschnitt bei einer lin. Vergröſserung = 500, Fig. 6, *a* und *b* darstellen, welche Säule sich aber in vielen andern Stücken zu verschiedenen äuſsern Gestalten verbindet und modificirt. Es war nicht so ganz leicht, diese Krystallisation zu ergründen, denn alles das, was die Mineralogie bisher unter den Namen »ganz klein, äuſserst zart« etc. angeführt hat, ist der auſserordentlichen Zartheit dieser Säulen nicht vergleichbar *). Schon mit freiem Auge erkennt man, daſs eine derlei feine Nadel, wenn man sie mit einem Messerchen aus den rosenartigen Anhäufungen hervornimmt, sich wieder in viele einzelne theilen läſst, die mit freiem Auge noch einigermaſsen zu unterscheiden sind. Dieſs bewog uns denn, dieses Mineral (was wohl noch seltener geschehen ist) dem Mikroskope zu unterwerfen.

Eine ungefähr 180fache Vergröſserung zeigte vor-

*) Selbst nach einer nur allgemeinen Ansicht überzeugt man sich, daſs die feinsten Nadeln des haarförmigen Zeolites, des Brauneisensteins *(Flèches d'amour)* etc. unsern Krystallen an Feinheit nicht gleich kommen. Nur einige Abarten des Amianthes (Bisselith) dürften das Kakoxen einigermaſsen übertreffen.

erst nichts anderes als Nadeln, die denen des gemeinen Grauspiefsglanzerzes ähnlich waren; eine 270fache liefs diese Krystallbündeln in einer Art erscheinen, wie das strahlig-gemeine Grauspiefsglanzerz mit freiem Auge erscheint. Als wir aber endlich diese feinen Nadeln einer 500fachen Vergröfserung unterwarfen, wurden wir sehr angenehm von Resultaten überrascht, die nach unserer Meinung Einiges zur nähern Kenntnifs der Mineralien im Allgemeinen beitragen könnten. Wir sahen nämlich eine Anhäufung von der oben erwähnten Krystallisationsform, wie sie auch beim Strahlstein, Schörl etc. vorkommt. Diese Krystalle waren weingelb, halbdurchsichtig, der Länge nach gestreift, und hatten aber (was wir eben auch bei so vielen andern Mineralformen beobachten) wieder noch feinere und haarförmige Nebenkrystalle an der Seite, dergleichen wiederkehrende Einschachtelungen man mit vielem Rechte eine Geifsel der Naturforscher nennen könnte *).

Die Gestaltungen, zu welchen sich nun diese Säulen verbinden und modificiren, sind mehrfach. Wir müssen aber zu deren Aufzählung eine gewisse Reihe von Bildungen annehmen, in welchen jene Gestaltungen auch erscheinen. Die vorzüglichste ist jene,

1) wo diese Säulen sich zu einer kugeligen Krystalldruse vereinigt haben, deren hirsengrofser Mittelpunct nicht aus Kakoxen, sondern höchst sonderbar aus einem Körnchen Brauneisenstein besteht. Diese Kugeln sind höchst selten ganz vorhanden, sondern blofs ihre Segmente, deren Durchmesser ungefähr $4\,^1/_2'''$ beträgt. Diefs ist die höchste Potenz des Vorkommens, welche aber, wegen der

*) Alle diese Versuche wurden mit einem vorzüglichen Instrumente von Hrn. *Plöfsl* angestellt.

vielen Bedingnisse, die zu einer so regelmäſsigen Bildung gehören, dann auch wegen der Schwierigkeiten, so zarte Stücke beim Abstufen rein zu erhalten, selten zu haben ist. Wird diese stätige Formation gestört, oder höchst wahrscheinlich (im Stadio der Bildung oder später) durch Zutritt von Wasser oder andern Urflüssigkeiten anders disponirt, so verschmelzen diese zarten Nadeln

2) zu gröbern und weniger regelmäſsigen, sie werden halb aufgelöst, verwirren sich, richten sich in die Höhe, und bilden äuſsere Gestalten, welche moosförmig, schaumartig u. dgl. aussehen, und für die ein ganz adäquater Name dermal schwer zu finden seyn dürfte. Manchmal stehen solche Anhäufungen einzeln zahnförmig da, oder sie überdecken

3*a*) an einander gedrängt ganze Flächen. Haben sich solche Lagen gebildet, so sind diese meistens wieder mit

3*b*) einem geflossenen Beschlag überzogen, welcher von allen früher beschriebenen Gestalten verschieden ist. — Noch kommt unser Fossil

4) als ein ziemlich dünner Beschlag vor, welcher manchmal ganze Flächen des traubenförmigen Glaskopfes überzieht. Auf diesem Beschlag finden sich wieder mitunter einzelne Bündeln des halbkrystallisirten Fossils in zahnförmigen Anhäufungen.

Das Kakoxen geht vom schönsten Zitronengelb (fast dem Goldgelben sich nähernd, daher ausgezeichnete Stücke (1) in einiger Ferne wie Goldstufen ansprechen) auf einer Seite ins Wachsgelbe (2), auf der andern ins Ockergelbe (3 *b*) und Braunlichrothe (3 *b*) über. 3 *b* hat äuſserlich eine Zeichnung von Puncten und darum gelagerten concentrischen Kreisen, welche mit den Mittel-

puncten der oben erwähnten kugelförmigen Krystalldruse in einer nähern Beziehung stehen dürften.

Der Glanz ist (1) stark; so erscheinen auch die einzelnen Krystalle unter der Loupe, und zwar halbmetallisch; 4 ist matt.

Alle Abänderungen des Kakoxens färben ab, 4 am wenigsten. Es ist sehr weich; 4 ist weich, hängt wenig an der Zunge.

Das specifische Gewicht mit dem *Leslie*'schen Apparate, wie er in Bd. V., S. 323 dieser Zeitschrift beschrieben ist, bestimmt, ergab sich = 3.38. Dabei konnte aber der Versuch nur mit einer Masse von 8.872 Gran vorgenommen werden, so daſs für diese Gröſse sich keine groſse Genauigkeit im Resultate erwarten läſst.

Der Geruch an einem ausgedehnten Überzug (3 *a*) versucht, ist ein wenig thonartig, aber ausgezeichnet geringer, als der des umliegenden Thoneisensteins.

Es hat einen sehr feinen Thongeschmack, jedoch mit einer kenntlich adstringirenden Beimengung.

In ihrem Zusammenhange sind die Krystalle und alle Abänderungen undurchsichtig.

An der Luft erleidet das Kakoxen keine merkliche Veränderung.

Einige Tage in Wasser gelegt, verlor (1) zum Theil seinen Glanz, die Krystalle waren nicht mehr so ausgesprochen, und wurden dunkler. Schon bei einem geringen Hitzgrade verändert das Kakoxen seine Farbe, und wird zwischen Nelken- und Haarbraun. Vor dem Löthrohre allein auf Kohle behandelt, knistert und springt es sehr stark, so daſs man Mühe hat, es darauf zu erhalten. Eben auf diese Art mit Borax behandelt, schmilzt es zu einer glasartigen Perle von dunkelbouteillengrüner Farbe, worin noch Körnchen von Kakoxen vorhan-

den bleiben. — Mit kohlensaurem Natron eben so behandelt, schmilzt es etwas schwerer, und fliefst endlich zu einer schwärzlichen Substanz, die zwischen Schlacke und Email steht. — Mit phosphorsaurem Natron auf obige Weise behandelt, schmilzt es, obgleich auch schwer, zu einer Perle, welche beim Erkalten erst schwarz, dann gelblichgrün wird, und endlich grau und wenig glänzend verbleibt. In der Oxygenflamme verwandelt es sich in eine schlackige Masse, die vom Magnete gezogen wird, und die Electricität schlecht leitet.

Auf eine silberne Platte, welche glüht, gestreut, phosphorescirt es nicht, jedoch wird es wie immer braun und verbrennt etwas. Auf heifse Eisenplatten gestreut, phosphorescirt es sehr deutlich mit einer lichtgrünen Farbe.

Es wirkt weder auf die empfindlichste Magnetnadel, noch wird es von einem Magnetstab gezogen. — Nach der Erwärmung konnte keine Spur von freier Electricität entdeckt werden, jedoch wird es sowohl vom geriebenen Siegellack als von einem Glasstabe gezogen.

Mit dem Kakoxen kommen noch einige Mineralien vor, die die Aufmerksamkeit der Mineralogen verdienen. Diese, so wie auch einige Stücke des Hauptfossils, habe ich defswegen in der (vorzüglich an geognostischen und vaterländischen Mineralien reichen) Sammlung des hiesigen k. k. polytechnischen Institutes niedergelegt, wo selbe Liebhabern und Kennern jederzeit zugänglich sind.

* * *

Alle Proben des Kakoxens, die zu den physikalischen Versuchen genommen wurden, waren sehr rein, welches nicht so ganz leicht zu erhalten ist, indem man nöthig hat, das Fossil von dem Muttergestein mit einem sehr feinen Messerchen abzuschaben, um es nicht durch

letzteres zu verunreinigen. Von eben solcher Beschaffenheit waren die bedeutenden Quantitäten des Kakoxens, die ich dem Hrn. Dr. Ritter von *Holger* zu einer chemischen Analyse mitgetheilt habe, deren Ergebnisse hiermit nachfolgen.

II.
Analyse des Kakoxens;

vom

Med. Dr. Ritter von *Holger*.

Das mir von Hrn. Dr. *Lhotsky* zur chemischen Untersuchung übergebene Kakoxen war im Zustande eines mäſsig feinen Pulvers, so wie es nämlich mit dem Messer vom Muttergesteine abgeschabt werden konnte. Es hatte eine gelblichbraune Farbe, welche dem Satinober sehr nahe kam, und sogleich das Vorhandenseyn des *Eisenperoxydhydrates* oder eines *basischen Eisenperoxydsalzes* vermuthen lieſs. Im Wasser gekocht blieb es unaufgelöset. In Kalilauge gekocht wurde es braunroth wie wasserfreies Eisenperoxyd. Mit Chlor digerirt löste sich der gröſste Theil aber erst nach einigen Wochen auf, und gab eine gelbbraune Auflösung, wie sie dem entstandenen salzsauren Eisenperoxyde entsprechen muſste. Wurde es mit Chlor gekocht, so erfolgte die Auflösung schon nach einigen Stunden. Immer aber blieb ein unlöslicher Rest, welcher blaſs gelbbraun gefärbt war, und erst, nachdem er drei Mal mit Kalilauge, dann mit Chlor gekocht wurde, in diesem aufgelöset werden konnte. Er wurde immer während des Kochens mit der Ätzlauge rothbraun, während des Kochens mit

dem Chlor gelbbraun. Das Kali löste immer die später anzugebenden Körper auf. Kurz er war nicht reine *Kieselsäure*, wie ich Anfangs glaubte. Er wog 9.33, nach dem Glühen 9.08. Die Auflösung in Kali enthielt Spuren von Kieselsäure, Thonerde, Schwefel- und Phosphorsäure, und zwar die Schwefelsäure in überwiegender Menge.

Das in Chlor bei der ersten Kochung auflösliche Kakoxen betrug daher nur 90.92. Es wurde zuerst durch einen Strom von gasförmigem Schwefelperhydrid geprüft, welcher durch die saure Auflösung geleitet wurde, jedoch keinen andern als den gewöhnlichen Schwefelniederschlag gab, der das Eisenperoxyd anzeigt. Es waren daher als abwesend erwiesen: *Silber*, *Blei*, *Wismuth*, *Kupfer*, *Merkur*, *Gold*, *Tellur*, *Osmium*, *Zinn*, *Antimon*, *Arsenik*, *Kadmium* *).

Nun wurde die Chlorlösung durch carbonsaures Kali zersetzt. Es entstand ohne Entweichung der Carbonsäure ein weifser Niederschlag, Nro. I., der nach dem Trocknen gelbbraun wurde, und dadurch zeigte, dafs er Eisenoxyd enthielt. Da aber das Eisen als Peroxyd in der Auflösung war, so mufste noch ein anderer Körper vorhanden seyn, der als Carbonat gefällt werden konnte. Als dieser zeigte sich später die *Talkerde*.

Dieser Niederschlag Nro. I. löste sich leicht und ohne Rückstand in freier *Kleesäure* mit grüner Farbe,

---

*) Da das Fossil noch wenig bekannt und selten ist, und ich mir die einzige bestehende Analyse von Prof. *Steinmann* damals noch nicht hatte verschaffen können, so hielt ich es für nöthig, es auf die wichtigsten einfachen Körper im Einzelnen zu untersuchen und sie auch immer namentlich anzuführen, was bei einer Untersuchung eines bekannteren Körpers hätte vermieden werden können.

dadurch war also das Dascyn des Eisens nochmals bewiesen und die Abwesenheit aller jener Metalloxyde dargethan, deren Oxalate in freier Kleesäure unlöslich sind, als: *Kalk*, *Zirkon*, *Yttererde*, *Mangan*, *Titan*, *Silber*, *Kadmium*.

Ferner lösete er sich leicht, vollständig und mit starkem Aufbrausen in Schwefel- oder Salpetersäure, enthielt daher weder *Baryt* noch *Strontian*.

Letztere Auflösung Nro. II. wurde durch Ammoniak zerlegt; es entstand ein gelbbrauner Niederschlag, Nro. II., *Eisenoxyd* und *Thonerde*. Die Lauge blieb klar und farbenlos, es war daher weder *Kupfer*, *Nickel* noch *Kobalt* vorhanden; sie konnte nur *Zinkoxyd* und *Talkerde* enthalten. Da carbonsaures Ammoniak dasselbe Verhalten zeigte, und gleichfalls eine farbenlose Lauge zurückliefs, so war auch weder *Uran*- noch *Ceroxyd* vorhanden.

Die Lauge dampfte ich nun zur Trockne ab, löste sie dann wieder in Säure auf, und erhielt eine Spur *Kieselsäure* im Rückstande. Die Auflösung gab mit carbonsaurem Kali einen weifsen Niederschlag, der sich vollständig in Salpetersäure mit Aufbrausen löste. Aus dieser letzteren Lösung, welche mit Ammoniak übersättigt wurde, fällte Hydrothionammoniak einen weifsen Körper, den ich für *Zinksulfurid* hielt, und als dieser entfernt war, phosphorsaures Natron gleichfalls einen weissen Körper, der phosphorsaures *Talknatron* war.

Der eben erwähnte gelbbraune Niederschlag Nro. II. wurde mit Ätzlauge gekocht, welche die *Thonerde* auflöste (die dann durch carbonsaures Ammoniak gefällt wurde), das *Eisenoxyd* aber zurückliefs. Diefs war aber getrocknet schwarzbraun, nicht rothbraun, wie reines Eisenperoxyd seyn sollte.

Ich löste es daher in Salpetersäure, schlug das Eisen durch Blutlauge nieder, und konnte nun aus dem

Reste durch salzsauren Baryt noch *Schwefel*- und *Phosphorsäure* fällen, es war daher basisches Eisensalz, welches durch Kochen mit Ätzlauge nicht ganz von der Säure befreit worden war.

Die sämmtlichen vorhandenen Basen waren daher *Eisenoxyd*, *Thonerde*, *Talkerde*, *Zinkoxyd*.

Die durch Zerlegung der Chlorlösung durch carbonsaures Kali entstandene Lauge Nro. I. war wasserklar und farbenlos. Als sie neutral gemacht wurde, entstand kein Niederschlag, es war daher keine der im Wasser schwer löslichen Metallsäuren, als *Zinn-*, *Antimon-*, *Scheel*- und *Tantalsäure* vorhanden. Dadurch, daſs die Auflösung ganz farbenlos war, zeigte sie, daſs sie weder *Molybdän-* noch *Chromsäure* enthielt, auch hätte sie dann mit Schwefelhydrogenammoniak Molybdänsulfurid, mit den Barytsalzen chromsaures Baryt geben müssen, was nicht der Fall war; es war aber auch kein *Chromoxydul* vorhanden, welches sonst während des Kochens mit Chlor in Chromsäure hätte übergehen müssen.

Hingegen gab die Auflösung Nro. I. mit salzsaurem Baryt einen starken weiſsen Niederschlag, der sich nur zum Theil in Säure löste; es war dieſs sonach ganz gewiſs *Schwerspath*, und die Existenz der *Schwefelsäure* war erwiesen. Der in Säure auflösliche Theil des Niederschlags wurde durch Ammoniak weiſs gefällt. Es war nun *phosphorsaures* oder *borsaures* Baryt; der Versuch mit dem brennenden Weingeist, dessen Flamme er nicht grün färbte, erwies ihn als *phosphorsaures Baryt*.

Wird das Kakoxen geglüht, so wird es während des Glühens schwarzbraun, abgekühlt rothbraun, wie Colcothar, in den es auch verwandelt wird. Der Gewichtsverlust nach dem Glühen ging bei drei Versuchen von 26 — 32 Procent. — Dieſs ist aber nicht Wasser allein, sondern *Schwefelsäure*, denn befeuchtete Lackmuspa-

piere werden geröthet, wenn sie über das glühende Kakoxen gehalten werden, und wenn das geglühte Mineral in Ätzlauge gekocht wird, so gibt diefs dann mit dem Barytsalze nur einen unbedeutenden Niederschlag, während er aus dem ungeglühten, in Ätzlauge gekochten in reichlichem Mafse erhalten wird. Schon hieraus geht hervor, dafs das Mineral seiner Hauptmasse nach *basisches schwefelsaures Eisenoxyd* ist, welches durch Glühen in *überbasisches Colcothar* verwandelt wird.

Dafs das Kakoxen keine Flufssäure enthalte, ergab sich daraus, weil während der ganzen Untersuchung nie ein Glas-, Porzellangefäfs oder ein Rührstäbchen angegriffen ward, selbst wenn es mit verdünnter Säure übergossen in solchen Gefäfsen gekocht wurde.

Das Kakoxen enthält daher folgende negative Körper: *Schwefelsäure, Phosphorsäure, Kieselsäure* *).

Die quantitative Analyse wurde eigentlich vier Mal ganz durchgeführt, jedoch gaben nur die beiden letzteren Arbeiten ein übereinstimmendes Resultat, welche daher allein hier in ihrer ganzen Ausdehnung angeführt werden.

Da es darauf ankam, ein Verfahren zu finden, nach welchem das Kakoxen ganz aufgelöset wurde, mufsten viele vergebliche, nicht entsprechende, Versuche angestellt werden. Bei der letzten Analyse zeigte sich erst, dafs diefs Verfahren sehr einfach war, und ziemlich nahe lag.

So oft nämlich das Kakoxen zuerst mit Ätzlauge und dann mit Chlor, oder, mit Hinweglassung des ersteren, alsogleich mit Chlor gekocht wurde, blieb immer der-

*) Die vorhandene Kieselsäure konnte zwar nicht nach diesem, wohl aber nach dem später eingeleiteten verbesserten Verfahren in wägbarer Quantität abgeschieden werden.

selbe unlösliche Rückstand, der zwischen 8.00 und 9.08 schwankte. Nur als ich nach dem Kochen mit Kali die in der Ätzlauge gelöseten Körper absonderte, und den braunen Rest für sich allein in Chlor kochte, gelang mir die vollständige Auflösung, und diefs war das bei der vierten Analyse angewendete Verfahren.

Das Kakoxen wurde mit Ätzlauge gekocht; der unlösliche braune Rest wog gewaschen und getrocknet nach mehreren übereinstimmenden Versuchen 51.85; geglüht durfte er nicht werden, denn da er nicht aus einer Auflösung gefällt war, so enthielt er kein Hydrat-, sondern nur hygroskopisches Wasser, er würde durch das Glühen blofs Schwefelsäure verloren, und dadurch zu unrichtigen Resultaten geführt haben. Dem zu Folge waren in Kali gelöset 48.15.

Als die Kalilösung mit Säure übersättigt wurde, schied sich die *Kieselsäure* in weifsen Flocken ab, welche geglüht 3.30 betrug; hierauf wurde durch Ammoniak die *Thonerde* 25.18, geglüht 11.29 und aus der sauer gemachten Auflösung durch salzsaures Baryt Schwerspath geschieden, dessen *Schwefelsäure* zu 6 88 berechnet wurde. Die freie Säure wurde durch Ammoniak gebunden, und nun fiel phosphorsaures Baryt nieder, das 6.44 *Phosphorsäure* enthielt. Der Rückstand wurde durch Schwefelsäure von dem noch vorhandenen Baryte befreit, dann stark eingekocht, um die ammoniakalischen Salze zu entfernen, und endlich daraus durch carbonsaures Kali das *Zinkoxyd* gefällt, welches ohne die Säure 1.23 betrug.

Dafs dieser Niederschlag wirklich Zinkoxyd war, scheint wohl hinreichend erwiesen, denn nicht nur dessen leichte Auflöslichkeit in Ätzkali und Ammoniak spricht dafür, sondern es wurde auch durch Hydrothionammoniak, Blutlauge und carbonsaures Kali nach oft

wiederholten Versuchen weifs gefällt, und das Sulfurid war in freien Alkalien nicht auflöslich.

Der vom Kali ungelöste Rest zu 51.85 wurde in Chlor gekocht ohne Rückstand aufgelöset. Aus dieser Auflösung fällte benzoesaures Kali das *Eisen*, welches nach meiner gewöhnlichen Methode mit Salpetersäure geglüht 36.83 *Eisenoxyd* gab. Der Überrest gab, zum Beweise, dafs sowohl Eisen als Talkerde durch Kochen mit Kali nicht vollständig von ihren Säuren getrennt wurden, mit salzsaurem Baryt nach der eben angeführten Behandlungsweise Schwerspath und phosphorsaures Baryt, und daraus 4.71 *Schwefelsäure* und 2.73 *Phosphorsäure*. Aus der rückständigen ammoniakalischen Auflösung fällte phosphorsaures Natron das Talkerde-Doppelsalz, aus welcher die *Talkerde* zu 7.58 berechnet wurde. Das Kakoxen enthielt daher

im unlöslichen Reste.		in der alkalischen Auflösung.	
Eisenoxyd . . .	36.83.	Kieselsäure . . .	3.30.
Schwefelsäure . .	4.71.	Schwefelsäure . .	6.88.
Phosphorsäure . .	2.73.	Phosphorsäure . .	6.47.
Talkerde	7.58.	Thonerde . . .	11.29.
	51.85.	Zinkoxyd	1.23.
			29.17.

Zusammen 81.02. Die noch fehlenden 18.98 sind das Hydrat- und hygroskopische Wasser, welches vorhanden seyn mufs, indem das Kakoxen beim Glühen 26 — 32 % verliert.

Berechnet man nämlich, dafs die 3 Atome Schwefelsäure des basisch schwefelsauren Eisens mit 4.71 nothwendig beim Glühen verloren gehen, um das Eisen als Colcothar zurück zu lassen, so hat man schon einen Glühverlust von 23.69. Da nun bei starker anhaltender Glühhitze auch die andern beiden Atome entweichen,

und selbst ein Theil der Phosphorsäure verflüchtigt werden kann, so ist es nach dieser Untersuchung sehr klar, wie das Kakoxen einen Glühverlust von 32 % ausweisen könne.

Bei der dritten Analyse wurde das Mineral alsogleich mit Chlor gekocht, ohne die Ätzlauge anzuwenden; es blieben nun 9.08 unlöslicher Rest, dessen Bestandtheile wir sogleich kennen lernen werden.

Die Chlorlösung wurde mit Ätzkali im Überschusse versetzt, und dadurch ein brauner Niederschlag erhalten, der, nach mehreren Versuchen, getrocknet zwischen 62.00 und 63.00 wog, und wiewohl er Hydrat war, nicht geglüht werden konnte, weil sonst durch den Verlust der Schwefelsäure unrichtige Resultate erhalten worden wären. Er löste sich ohne Rückstand in Chlor, und diese Chlorlösung wurde so wie die von dem Niederschlage abgesonderte Kalilösung nach der erst angegebenen Weise zerlegt, und gab folgende Resultate: Das Kakoxen enthielt

im durch das Kali ausgeschiedenen Reste.		in der alkalischen Auflösung.	
Eisenoxyd . . .	34.27.	Schwefelsäure . .	6.88.
Schwefelsäure . .	4.39.	Phosphorsäure . .	6.47.
Phosphorsäure . .	2.71.	Thonerde . . .	11.35.
Talkerde	4.85.	Zinkoxyd . . .	1.25.
	46.22.		25.95.

Summirt man diese beiden Zahlen zu den ungelösten 9.08, so bleiben wieder 18.75 für Hydratwasser.

Vergleicht man diese beiden ziemlich nahe übereinstimmenden Analysen, so findet man auch die Bestandtheile des in Chlor ungelösten Niederschlages. Er besteht nämlich aus

Eisenoxyd . . .	2.56,
Schwefelsäure . .	0.32,
Talkerde . . .	2.73,
Kieselsäure . . .	3.30,
	8.91,

oder aus überbasischem schwefelsaurem Eisen . 2.88,
Talksilicat . . . . 6.03.

Dafs das Talksilicat in Chlor unlöslich war, ist nicht auffallend, eben so wenig, dafs es eine geringe Menge des schwefelsauren Eisens vor der Auflösung schützte. Es ist übrigens eine Verbindung, die nach mehrfachen Verhältnissen zusammengesetzt in verschiedenen Mineralien vorkommt. Das hier gefundene Verhältnifs stimmt mit dem zweiten der vier Talksilicate, die *Berzelius* angibt (60.61 Kieselsäure, 39.39 Talk), sehr nahe überein.

Das Kakoxen bestünde demnach im Ganzen aus

Eisenoxyd . . .	36.83.
Schwefelsäure . .	11.59.
Thonerde . . .	11.29.
Phosphorsäure .	9.20.
Zinkoxyd . . .	1.23.
Kieselsäure . . .	3.30.
Talkerde . . .	7.58.
Wasser	18.98.
	100.00.

Was nun die Zusammensetzung des Minerals nach quaternären Verbindungen betrifft, so läfst sich freilich darüber wenig Sicheres bestimmen, als dafs dessen Hauptbestandtheil *basisch schwefelsaures Eisenoxyd* ist, und dafs die übrigen im Wasser schwer oder gar nicht auflöslich seyn müssen. Man könnte etwa folgende Zusammensetzung als wahrscheinlich angeben:

Basisch schwefelsaures Eisenoxyd .	46.25.
Talksilicat	6.03.
Phosphorsaures Zink	2.31.
Basisch schwefelsaure Alaunerde .	4.94.
Phosphorsaure Alaunerde	16.80.
Talkhydrat	6.95.
Wasser	2.10.
	85.58.

Von den übrigen 14.42 % Wasser nimmt das schwefelsaure Eisen 10.84, die schwefelsaure Alaunerde 3.58 auf.

Diese hohe Zusammensetzung läſst nun freilich nicht erwarten, daſs das Verhältniſs der Nebenbestandtheile zu den Hauptbestandtheilen dem *schwefelsauren Eisen* und der *phosphorsauren Alaunerde* stets beständig bleiben werde; es dürften daher auch fortgesetzte Analysen verschiedene quantitative Verhältnisse ausweisen. Ausserdem sind noch zwei Puncte zu berücksichtigen, welche es immer sehr erschweren werden, quantitativ übereinstimmende Analysen des Kakoxens zu erhalten. Erstens kommt das Mineral in verschiedenen Krystallformen und gemeinen Gestalten vor, welche durchaus so klein und verworren sind, daſs es nicht möglich wird, zu jeder Analyse eine hinreichende Menge von Kakoxen, welches dieselbe Gestalt hätte, abzusondern. Nun entsprechen aber diesen verschiedenen Formen, wenn auch nicht verschiedene Verhältnisse der Bestandtheile überhaupt, doch wahrscheinlich ein verschiedener Wassergehalt, welches schon auf die ganze Analyse verändernd einwirkt. Zweitens sitzt das Kakoxen in so dünnen Lagen auf dem Glaskopfe auf, daſs beim sorgfältigsten Abschaben es kaum vermieden werden kann, daſs nicht vom Glaskopfe etwas unter das zu untersuchende Mineral komme, wodurch dann dessen Eisengehalt unverhält-

nifsmäfsig vermehrt wird. Darin lag der Grund des so stark abweichenden Eisengehaltes der ersten beiden Analysen, dafs sie nicht angeführt werden konnten, und es ist demnach mehr auf Rechnung eines glücklichen Zufalls zu setzen, dafs ich zuletzt noch zwei ziemlich übereinstimmende und durchaus sehr wahrscheinliche Analysen durchführen konnte, der mir gerade zu diesen beiden vom Glaskopfe freies gleichartiges Kakoxen in die Hand führte.

Aufser dem Kakoxen untersuchte ich noch das Muttergestein, auf welchem der Glaskopf, und auf diesem das Kakoxen liegt. Man hätte es dem Ansehen nach für Thoneisenstein halten sollen, doch die Untersuchung lehrte anders.

Bei der grofsen Masse dieses Körpers war es leicht, ein Stück zur Analyse zu erhalten, welches vom Glaskopfe ganz frei war. Die Untersuchung geschah durch Kochen mit Kalilauge, und dann mit Chlor. Es blieb ein unlöslicher Rest, der aber weifs war, sich in Kali löste, und durch Säuren wieder in weifsen Flocken gefällt wurde, somit sich als reine Kieselsäure verhielt: er wog geglüht 32.8. Aufserdem wurde nach der bereits angeführten Methode gefunden:

Eisenoxyd . . .	26.00.
Thonerde . . .	2.06.
Zinkoxyd . . .	9.04.
Talkerde . . .	1.02.
Phosphorsäure .	6.02.
Schwefelsäure .	7.02.
Kieselsäure . .	32.80.
	83.96.
Wasser	16.04.

Diesemnach enthält das Muttergestein alle Bestand-

theile des Kakoxens, und kann eben sowohl angesehen werden als bestehend aus 19.96 Kakoxen und 80.04 eines Körpers, dessen Bestandtheile quaternär so dargestellt werden können:

Basisch schwefelsaures Eisen . .	23.35.
Phosphorsaures Zink	8.94.
Zinksilicat	6.64.
Kieselsäurehydrat	34.00.
Wasser des Eisensalzes	6.30.
» » Zinksilicats	2.79.

Ist gleich letztere Zusammensetzung hypothetisch, so ist es doch interessant, dafs sie aus den durch Versuche gefundenen Quantitäten durch Rechnung zusammengestellt werden konnte. Sollte man ihr einiges Gewicht beilegen, so müfste man aber zugleich auch darauf aufmerksam werden, dafs das Kakoxen vielleicht durch einen Sublimationsprozefs aus dem Muttergesteine emporgetrieben wurde, denn unwillkürlich erinnert man sich bei Betrachtung dieser Zusammensetzung an die Bereitung des Merkursublimats, wobei dieser aus der Masse nadelförmig emporsteigt, während mit Sublimat verunreinigtes Glaubersalz zurückbleibt.

III.

Theorie der mittleren Werthe;

von

Dr. *C. Fr. Hauber.*

(Fortsetzung.)

17.

Statt nach dem *Gaufs*'schen, etwas willkürlich scheinenden, Grundsatze den mittlern Werth des Quadrats des Fehlers einer Bestimmung zu suchen, kann man auch, wie *Laplace* und *Poisson* in den oben angeführten Schriften gethan haben, untersuchen, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sey, dafs der Fehler dieser Bestimmung innerhalb gewisser Grenzen liege. Je gröfser diese Wahrscheinlichkeit für gegebene Grenzen ist, oder je enger die Grenzen bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit sind, als desto genauer wird die Bestimmung anzusehen seyn.

Wir wollen daher die Wahrscheinlichkeit suchen, dafs der Werth von $\Sigma \varepsilon_n$ zwischen gewissen Grenzen $b - c$ und $b + c$ liege. In Beziehung auf die möglichen Werthe von x und ihre Wahrscheinlichkeiten wollen wir dieselbe Voraussetzung annehmen, wie in Nro. 16, da sich der Fall, wo sie für alle s Versuche dieselben sind, darunter subsumiren läfst.

Sind x'_1, x''_1, . . . x'_n, x''_n, . . . x'_s, x''_s, . . . ferner $b - c$ und $b + c$ lauter ganze Zahlen, so werden auch die Producte derselben in irgend eine ganze Zahl β, die man so grofs nehmen kann als man will, ganze Zahlen seyn, und es wird auch $\beta \Sigma \varepsilon_n$ nothwendig eine ganze Zahl seyn. Sind x'_1, x''_1 u. s. w., $b - c$, $b + c$ entweder durchaus oder zum Theil Brüche, so wird

sich immer eine Zahl β von der Beschaffenheit finden lassen, daſs die Producte jener Brüche in diese Zahl ganze Zahlen sind, indem man z. B. β dem Producte aus den Nennern dieser Brüche gleich nimmt; und hat man einmal eine Zahl, welche dieſs leistet, so wird auch das Product dieser Zahl in irgend eine ganze Zahl dasselbe leisten, daher kann man β gröſser nehmen, als jede gegebene Gröſse. Sind x'_1, x''_1 u. s. w., $b-c$, $b+c$ entweder durchaus oder zum Theil irrational, so wird sich dasselbe zwar nicht ganz genau, aber doch mit jedem beliebigen Grade der Annäherung bewerkstelligen lassen.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_s$ resp. $= x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots x_s^{(n)}$ seyen, wird durch das Product $p_1^{(n)}\ p_2^{(n)}\ \ldots\ p_s^{(n)}$ ausgedrückt; der Werth von $\beta \Sigma \varepsilon_n$ ist in diesem Falle

$$m = \beta x_1^{(n)} + \beta x_2^{(n)} + \ldots + \beta x_s^{(n)}.$$

Gibt es mehrere Combinationen der möglichen Werthe von x bei den s Versuchen, welche für $\beta \Sigma \varepsilon_n$ denselben Werth m geben, wo m eine ganze Zahl ist, so wird die Wahrscheinlichkeit, daſs $\beta \Sigma \varepsilon_n = m$ sey, durch das Aggregat der allen diesen Combinationen entsprechenden, dem $p_1^{(n)}\ p_2^{(n)}\ \ldots\ p_s^{(n)}$ analogen, Producte ausgedrückt. Dieses Aggregat ist aber offenbar gleich dem Coefficienten von t^m in der Entwicklung des Products

$$T = Sp_1 t^{\beta x_1} Sp_2 t^{\beta x_2} \ldots Sp_s t^{\beta x_s},$$

wo $Sp_1 t^{\beta x_1} = p'_1 t^{\beta x'_1} + p''_1 t^{\beta x''_1} + \ldots$ ist, u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs $\beta \Sigma \varepsilon_n$ einer gewissen ganzen Zahl m gleich sey, wird also ausgedrückt durch den Coefficienten von t^m in der Entwicklung von T, oder durch das von t unabhängige Glied in der Entwicklung des Products $T . t^{-m}$, oder, wenn man $e^{\vartheta\sqrt{-1}}$ an die Stelle von t setzt, durch das von ϑ unabhängige Glied N

in der Entwicklung des Products $Pe^{-m\vartheta\sqrt{-1}}$, wo
$P = Sp_1 e^{\beta x_1 \vartheta\sqrt{-1}}\, Sp_2 e^{\beta x_2 \vartheta\sqrt{-1}} \ldots . Sp_s e^{\beta x_s \vartheta\sqrt{-1}}$
ist. Nun ist

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Pe^{-m\vartheta\sqrt{-1}}\, d\vartheta,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und $\pi = 3.1415926\ldots$ ist; denn es ist $Pe^{-m\vartheta\sqrt{-1}} = N + Q$, wo Q ein Aggregat von Gliedern von der Form $e^{-q\vartheta\sqrt{-1}}$ und q immer eine ganze Zahl ist; es ist aber

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-q\vartheta\sqrt{-1}}\, d\vartheta = \frac{e^{q\pi\sqrt{-1}} - e^{-q\pi\sqrt{-1}}}{q\sqrt{-1}} = \frac{2}{q}\sin. q\pi$$

$= 0$ für irgend eine ganze Zahl q; also reducirt sich $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Pe^{-m\vartheta\sqrt{-1}}\, d\vartheta$ auf $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} N d\vartheta = N$.

Die Wahrscheinlichkeit W, dafs $\beta\Sigma\varepsilon_n$ zwischen zwei ganzen Zahlen μ und μ' liege, oder einer von denselben gleich sey, wird ausgedrückt durch die Summe der Glieder wie N, welche den Werthen $m = \mu$, $m = \mu + 1$, $m = \mu + 2$ u. s. w. bis $m = \mu'$ entsprechen, oder, wenn

$$Se^{-m\vartheta\sqrt{-1}} = e^{-\mu\vartheta\sqrt{-1}} + e^{-(\mu+1)\vartheta\sqrt{-1}} + \ldots \ldots + e^{-\mu'\vartheta\sqrt{-1}}$$

ist, durch $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} PSe^{-m\vartheta\sqrt{-1}}\, d\vartheta$.

Es ist aber

$$Se^{-m\vartheta\sqrt{-1}} = \frac{e^{-(\mu'+1)\vartheta\sqrt{-1}} - e^{-\mu\vartheta\sqrt{-1}}}{e^{-\vartheta\sqrt{-1}} - 1}$$

$$= \frac{e^{-(\mu'+\frac{1}{2})\vartheta\sqrt{-1}} - e^{-(\mu-\frac{1}{2})\vartheta\sqrt{-1}}}{e^{-\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{-1}} - e^{\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{-1}}}$$

$$= \frac{e^{-(\mu-\frac{1}{2})\vartheta\sqrt{-1}} - e^{-(\mu'+\frac{1}{2})\vartheta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\,.\,\sin.\frac{1}{2}\vartheta},$$

folglich

$$W = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P \,\frac{e^{-(\mu-\frac{1}{2})\vartheta\sqrt{-1}} - e^{-(\mu'+\frac{1}{2})\vartheta\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\,.\,\sin.\frac{1}{2}\vartheta}\, d\vartheta.$$

Setzt man $\mu = \beta(b-c)$, $\mu' = \beta(b+c)$, wo $\beta(b-c)$ und $\beta(b+c)$ nach dem Obigen ganze Zahlen sind, ferner $\beta\vartheta = z$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs $\Sigma\varepsilon_n$ zwischen $b-c$ und $b+c$ liege.

$$W = \frac{1}{4\pi}\int P \,\frac{e^{-bz\sqrt{-1}}}{\beta\sqrt{-1}\,.\,\sin.\frac{z}{2\beta}} \left(e^{\left(c+\frac{1}{2\beta}\right)z\sqrt{-1}} - e^{-\left(c+\frac{1}{2\beta}\right)z\sqrt{-1}}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int P \,\frac{e^{-bz\sqrt{-1}}}{\beta\sin.\frac{z}{2\beta}}\, \sin.\left(c+\frac{1}{2\beta}\right)z\,.\,dz,$$

wo das Integral von $z = -\beta\pi$ bis $z = +\beta\pi$ zu nehmen ist, und wo man nach dem Obigen β gröſser nehmen kann als jede gegebene Gröſse. Setzt man $\beta = \infty$, so wird $\sin.\left(c+\frac{1}{2\beta}\right)z = \sin.cz$, $2\beta\sin.\frac{z}{2\beta} = z$, und die Grenzen des Integrals $-\infty$ und $+\infty$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P e^{-bz\sqrt{-1}} \sin.cz\,.\,\frac{dz}{z},$$

wo $P = Sp_1 e^{x_1 z\sqrt{-1}}\, Sp_2 e^{x_2 z\sqrt{-1}} \ldots Sp_s e^{x_s z\sqrt{-1}}$ ist.

18.

Um aus dieser Formel brauchbare Resultate abzuleiten, wollen wir genäherte Ausdrücke suchen, welche, wenn s sehr groſs ist, an die Stelle der vorigen gesetzt werden können, und welche strenge sind für $s = \infty$, und um so genauer, je gröſser s ist.

Um zuerst P anders auszudrücken, hat man

$$Sp_1 e^{x_1 z\sqrt{-1}}$$

$$= Sp_1 + Sp_1\left(x_1 z - \frac{x_1^3 z^3}{2.3} + \frac{x_1^5 z^5}{2.3.4.5} - \ldots\right)\sqrt{-1}$$

$$- Sp_1\left(\frac{x_1^2 z^2}{2} - \frac{x_1^4 z^4}{2.3.4} + \frac{x_1^6 z^6}{2.3.4.5.6} - \ldots\right)$$

$$= 1 + \left(zK_1 - z^3\frac{K_1''}{2.3} + z^5\frac{K_1^{IV}}{2.3.4.5} - \ldots\right)\sqrt{-1}$$

$$- z^2\frac{K_1'}{2} + z^4\frac{K_1'''}{2.3.4} - z^6\frac{K_1^{V}}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$

und daher

$$\text{Log. } Sp_1 e^{x_1 z\sqrt{-1}}$$

$$= (A_1 z - C_1 z^3 + E_1 z^5 - G_1 z^7 + \ldots)\sqrt{-1}$$

$$- B_1 z^2 + D_1 z^4 - F_1 z^6 + \ldots,$$

wo $A_1 = K_1$,

$$B_1 = \tfrac{1}{2}(K_1' - K_1^2) = \frac{L_1^2}{2},$$

$$C_1 = \frac{K_1''}{6} - \frac{K_1 K_1'}{2} + \frac{K_1^3}{3}$$

ist, u. s. w

Addirt man zu dem vorhergehenden Ausdrucke für $\text{Log. } Sp_1 e^{x_1 z\sqrt{-1}}$ die analogen Ausdrücke für

$$\text{Log. } Sp_2 e^{x_2 z\sqrt{-1}}, \ldots \text{Log. } Sp_s e^{x_s z\sqrt{-1}},$$

und setzt man

$$\frac{1}{s}\Sigma A_n = A, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{s}\Sigma K_n = K,$$

$$\frac{1}{s}\Sigma B_n = B, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2s}\Sigma L_n^2 = \frac{L^2}{2},$$

$$\frac{1}{s}\Sigma C_n = C, \quad \text{u. s. w.};$$

so erhält man

$$\text{Log. } P = R\sqrt{-1} - S, \quad \text{oder} \quad P = e^{R\sqrt{-1} - S},$$

wo $R = s(Az - Cz^3 + Ez^5 - \ldots)$
und $S = s(Bz^2 - Dz^4 + Fz^6 - \ldots)$

ist. Demnach verwandelt sich der obige Ausdruck für W in folgenden:

$$W = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(R - bz)\sqrt{-1} - S} \sin. cz \, . \frac{dz}{z},$$

oder, da R lauter ungerade, S lauter gerade Potenzen von z enthält,

$$W = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-S} \left(e^{(R - bz)\sqrt{-1}} + e^{-(R - bz)\sqrt{-1}}\right) \sin. cz \, . \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-S} \cos. (R - bz) \sin. cz \, . \frac{dz}{z},$$

oder, wenn man für z setzt $\frac{y}{\sqrt{s}}$,

$$W = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-S} \cos. \left(R - \frac{by}{\sqrt{s}}\right) \sin. \frac{cy}{\sqrt{s}} \, . \frac{dy}{y},$$

wo $R = Ay\sqrt{s} - \frac{Cy^3}{\sqrt{s}} + \frac{Ey^5}{s\sqrt{s}} - \ldots$

und $S = By^2 - \frac{Dy^4}{s} + \frac{Fy^6}{s^2} - \ldots$

ist. Vernachlässigt man, da nach der Voraussetzung s sehr grofs ist, die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{s}$, so ist

$$S = By^2 = \frac{L^2}{2} y^2 \quad \text{und}$$

$$\cos. \left(R - \frac{by}{\sqrt{s}}\right) = \cos. (As - b) \frac{y}{\sqrt{s}} + \frac{Gy^3}{\sqrt{s}} \sin. (As - b) \frac{y}{\sqrt{s}},$$

oder, da $A = K$ ist,

$$= \cos. (Ks - b) \frac{y}{\sqrt{s}} + \frac{Cy^3}{\sqrt{s}} \sin. (Ks - b) \frac{y}{\sqrt{s}},$$

also

$$W = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{L^2 y^2}{2}} \cos. (Ks - b) \frac{y}{\sqrt{s}} \, . \sin. \frac{cy}{\sqrt{s}} \, . \frac{dy}{y}$$

$$+ \frac{2C}{\pi\sqrt{s}}\int_0^{\infty} y^2 e^{-\frac{L^2 y^2}{2}} \sin. (Ks - b) \frac{y}{\sqrt{s}} \sin. \frac{cy}{\sqrt{s}} \, . dy.$$

Nimmt man $b = sK = \Sigma K_n$, d. h. gleich der Summe der mittleren Werthe von x bei den s Versuchen, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, daſs $\Sigma \varepsilon_n$ zwischen den Grenzen $\Sigma K_n - c$ und $\Sigma K_n + c$ liege,

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{L^2 y^2}{2}} \sin. \frac{c y}{\sqrt{s}} \cdot \frac{d y}{y}.$$

Es ist aber

$$\int_0^\infty e^{-a^2 y^2} \sin. r y \cdot \frac{dy}{y} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int e^{-\frac{r^2}{4a^2}} dr,$$

das letztere Integral von $r = 0$ an genommen (s. *Lapl. Théorie anal. des Probab. p.* 98); setzt man hier $a = \frac{L}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{c}{\sqrt{s}}$, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daſs $\Sigma \varepsilon_n$ zwischen $\Sigma K_n \mp c$ liege, in folgenden:

$$\frac{1}{L} \sqrt{\frac{2}{s\pi}} \int e^{-\frac{c^2}{2 s L^2}} dc,$$

das Integral von $c = 0$ an genommen.

Setzt man $c = t L \sqrt{2s} = t \sqrt{2 \Sigma L_n^2}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\Sigma \varepsilon_n \text{ zwischen } \Sigma K_n \mp t \sqrt{2 \Sigma L_n^2}$$
$$\text{oder zwischen } sK \mp t L \sqrt{2s},$$

oder daſs $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$ zwischen $K \mp t L \sqrt{\frac{2}{s}}$ liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt,$$

das Integral von $t = 0$ an genommen.

Demnach wird die Wahrscheinlichkeit, daſs $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$ oder das arithmetische Mittel aus den zufälligen Werthen von x bei s Versuchen von dem mittlern Werthe $K = \frac{1}{s} \Sigma K_n$ um weniger als eine Gröſse δ verschieden

sey, ausgedrückt durch $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$, das Integral von $t = 0$ bis $t = \frac{\delta}{L} \sqrt{\frac{s}{2}}$ genommen. Diese Wahrscheinlichkeit ist also für einerlei Werth von δ desto gröſser, je gröſser s ist; für $s = \infty$ wird sie zur Gewiſsheit, da $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 1$ ist. Umgekehrt ist bei derselben Wahrscheinlichkeit die Differenz δ desto kleiner, je gröſser s ist, und man kann durch Vergröſserung von s bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit δ so klein machen als man will. K würde also der Werth von $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$ bei einer unendlichen Anzahl von Versuchen, Beobachtungen u. dgl. seyn.

Das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$ wird $= \frac{1}{2}$ für $t = 0.4769363$ oder für $t\sqrt{2} = 0.6744897$; daher ist die Wahrscheinlichkeit, daſs die Differenz zwischen $\Sigma \varepsilon_n$ und ΣK_n kleiner als

$$0.67449 \sqrt{\Sigma L_n^2} \quad \text{oder} \quad 0.67449\, L \sqrt{s},$$

oder daſs $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$ von $\frac{1}{s} \Sigma K_n = K$ um weniger als

$$w = 0.67449 \times \frac{1}{s} \sqrt{\Sigma L_n^2} = 0.67449 \frac{L}{\sqrt{s}}$$

verschieden sey, der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich; man kann w die wahrscheinliche Unsicherheit der Annahme $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n = K$ nennen.

Vergleicht man den vorhergehenden Ausdruck für w mit dem in Nro. 13, b), Nro. 15, a) und Nro. 16, a) gefundenen für M in Beziehung auf $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$, so sieht man, daſs

$$w = 0.67449\, M$$

ist.

Beisp. a) In dem Beispiele Nro. 3, a) ist $K = \frac{7}{2}$, $L^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$ und $0.67449\,L = 1.1519$, also ist 1 gegen 1 zu wetten, daſs die Summe $\Sigma\,\varepsilon_n$ der Zahlen, die mit einem Würfel auf s Male geworfen werden, von $s \times \frac{7}{2}$ um weniger als $1.1519\sqrt{s}$, oder daſs das arithmetische Mittel $\frac{1}{s}\Sigma\,\varepsilon_n$ aus jenen Zahlen von 3.5 um weniger als $\frac{1.1519}{\sqrt{s}}$ verschieden seyn werde.

Nimmt man z. B. $s = 100$, so ist 1 gegen 1 zu wetten, daſs $\Sigma\,\varepsilon_n$ von 350 um weniger als 11.519, oder daſs $\frac{1}{s}\Sigma\,\varepsilon_n$ von $3\frac{1}{2}$ um weniger als 0.11519 verschieden seyn werde.

Das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}\,dt$ wird $= \frac{9}{10}$ für $t = 1.16309$; dann ist $tL\sqrt{2} = 2.8091$, also ist 9 gegen 1 zu wetten, daſs $\Sigma\,\varepsilon_n$ von $s \times \frac{7}{2}$ um weniger als $2.8091\sqrt{s}$, oder daſs $\frac{1}{s}\Sigma\,\varepsilon_n$ von $\frac{7}{2}$ um weniger als $\frac{2.8091}{\sqrt{s}}$ verschieden seyn werde.

Nimmt man z. B. $s = 10000$, so ist 9 gegen 1 zu wetten, daſs $\Sigma\,\varepsilon_n$ von 35000 um weniger als 280.91, oder daſs $\frac{1}{s}\Sigma\,\varepsilon_n$ von 3.5 um weniger als 0.02809 verschieden seyn werde.

b) In dem Beispiele Nro. 3, c) ist

$$K = ap - b(1-p) \quad \text{und} \quad K' = a^2 p + b^2 (1-p),$$

woraus folgt

$$L = (a+b)\sqrt{p(1-p)};$$

daher ist die Wahrscheinlichkeit, daſs $\Sigma\,\varepsilon_n$ oder der Vortheil bei $s$maliger Wiederholung des Unternehmens zwischen

$$s(ap - b(1-p)) - t(a+b)\sqrt{2sp(1-p)}$$
und $$s(ap - b(1-p)) + t(a+b)\sqrt{2sp(1-p)}$$
liegen werde, $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2}\,dt$.

Ist $a : b = 1 - p : p$ (z. B. wenn zwei Spieler Summen auf's Spiel setzen, die ihren Geschicklichkeiten proportional sind, so daſs für einen jeden die Summe, die er gewinnen kann, sich zu der Summe, die er verlieren kann, verhält wie die Wahrscheinlichkeit, daſs er verliere, zu der Wahrscheinlichkeit, daſs er gewinne), so ist die *Espérance mathématique* $K = 0$, und

$$L^2 = K' = a^2\left(p + \frac{p^2}{1-p}\right) = \frac{a^2 p}{1-p},$$

also die Wahrscheinlichkeit, daſs der gesammte Gewinn oder Verlust bei $s$maliger Wiederholung des Unternehmens die Summe

$$w = 0.67449\, a \sqrt{\frac{sp}{1-p}}$$

nicht übersteigen werde, der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich.

Ist $a = b$ und $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ (z. B. wenn zwei Spieler von gleicher Geschicklichkeit gleiche Summen auf's Spiel setzen), so ist

$$w = 0.67449\, a \sqrt{s}.$$

c) Ist eine Lebensrente von einer gewissen Zeit T an s Personen, jeder jährlich mit der Summe a, auszuzahlen, so wird der mittlere Werth der auf die Zeit T zurück discontirten Ausgabe x der Casse nicht für alle Personen derselbe seyn, wenn sie nicht alle von gleichem Alter sind. Es sey allgemein für die n^{te} Person der mittlere Werth von x, der sich nach Nro. 3, d) oder nach Nro. 4, β) berechnen läſst, $= K_n$, und der mittlere Werth von x^2, der sich nach Nro. 10, a, δ) oder nach

Nro. 11, b, β) berechnen läſst, $= K'_n$; so ist mit einer Wahrscheinlichkeit $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$ zu erwarten, daſs die auf die Zeit T zurück discontirte Ausgabe der Casse an alle s Personen zusammen zwischen

$$\Sigma K_n \mp t\sqrt{2\,\Sigma(K'_n - K_n^2)},$$

oder, wenn B die Summe der Einlagen der s Personen zur Zeit T ist, daſs der Vortheil der Casse, auf die Zeit T zurück discontirt, zwischen

$$B - \Sigma K_n \pm t\sqrt{2\,\Sigma(K'_n - K_n^2)}$$

liegen werde. Ist die Einlage einer jeden Person eben so groſs, als der mittlere Werth von x für diese Person, so ist 1 gegen 1 zu wetten, daſs die Casse an einer jeden im Durchschnitt nicht über

$$0.67449 \times \frac{1}{s}\sqrt{\Sigma(K'_n - K_n^2)}$$

gewinne oder verliere.

Dieſs läſst sich auch auf Witwencassen u. s. w. anwenden.

19.

Multiplicirt man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots \varepsilon_s$ resp. mit beliebigen Factoren $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots \gamma_s$, so läſst sich das in Nro. 17 und 18 in Beziehung auf $\Sigma\varepsilon_n$ Gesagte auch auf $\Sigma\gamma_n\varepsilon_n$ ausdehnen, wenn man nur für

$$x'_n,\ x''_n, \ldots K_n,\ K'_n,\ L_n^2 \text{ u. s. w. setzt}$$

$$\gamma_n x'_n,\ \gamma_n x''_n, \ldots \gamma_n K_n,\ \gamma_n^2 K'_n,\ \gamma_n^2 L_n^2 \text{ u. s. w.}$$

Man hat also analog mit Nro. 18 die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\Sigma\gamma_n\varepsilon_n \text{ zwischen } \Sigma\gamma_n K_n \mp t\sqrt{2\,\Sigma\gamma_n^2 L_n^2},$$

oder daſs

$$\frac{1}{s}\Sigma\gamma_n\varepsilon_n \text{ zwischen } \frac{1}{s}\Sigma\gamma_n K_n \mp \frac{t}{s}\sqrt{2\,\Sigma\gamma_n^2 L_n^2} \text{ liege. wo}$$

$\frac{1}{s}\sqrt{2\Sigma\gamma_n^2 L_n^2}$ von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ist,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

Setzt man $\Sigma\gamma_n\varepsilon_n = \Sigma\gamma_n K_n$, so ist der wahrscheinliche Fehler dieser Annahme

$$w = 0.67449 \sqrt{\Sigma\gamma_n^2 L_n^2}$$

oder $w = 0.67449\, M$,

wenn man M in demselben Sinne nimmt, wie in Nro. 16, b).

Sind die möglichen Werthe von x und ihre Wahrscheinlichkeiten bei allen s Versuchen dieselben, so ist eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$ vorhanden, daſs

$$\Sigma\gamma_n\varepsilon_n \text{ zwischen } K\Sigma\gamma_n \mp tL\sqrt{2\Sigma\gamma_n^2}$$

liege, und der wahrscheinliche Fehler der Annahme $\Sigma\gamma_n\varepsilon_n = K\Sigma\gamma_n$ ist

$$= 0.67449\, L\sqrt{\Sigma\gamma_n^2} = 0.67449\, M,$$

wenn man M in demselben Sinne nimmt, wie in Nro. 15, b).

20.

Das in Nro. 17—19 in Beziehung auf ε_1; ε_2, ... ε_n, ... ε_s Gesagte läſst sich auch auf $f\varepsilon_1$, $f\varepsilon_2$, ... $f\varepsilon_n$, ... $f\varepsilon_s$ anwenden, wenn fx eine Function von x bezeichnet, welche so beschaffen ist, daſs allen möglichen Werthen von x reelle Werthe von fx entsprechen. Man darf dabei nur an die Stelle der möglichen Werthe von x und ihrer Wahrscheinlichkeiten die möglichen Werthe von fx und ihre Wahrscheinlichkeiten setzen. Der mittlere Werth von fx ist nach Nro. 10 $= Spfx$, und der mittlere Werth von $(fx)^2 = Sp(fx)^2$.

So ist z. B. nach Nro. 18 für $fx = x^2$ eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$ vorhanden, daſs

$$\Sigma\varepsilon_n^2 \text{ zwischen } \Sigma K_n' \mp t\sqrt{2\Sigma(K_n''' - K_n''^2)}.$$

oder dafs

$$\frac{1}{s}\Sigma \varepsilon_n^2 \text{ zwischen } K' \mp \frac{t}{s}\sqrt{2\Sigma(K_n''' - K_n'^2)}$$

liege. Setzt man $\Sigma \varepsilon_n^2 = \Sigma K_n'$, so ist der wahrscheinliche Fehler w dieser Annahme

$$= 0.67449\sqrt{\Sigma[K_n''' - (K_n')^2]},$$

oder $w = 0.67449\, M$, wenn man M in demselben Sinne nimmt, wie in Nro. 16, c).

21.

Wenn die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Werthe von x bekannt sind, so lassen sich die Gröfsen K, K' u. s. w. *a priori* bestimmen, und man wird die vorhergehenden Sätze über die zufälligen Werthe von x auf künftige Ereignisse anwenden können. In manchen Fällen sind aber jene Wahrscheinlichkeiten unbekannt; dann werden diese Sätze dazu dienen, aus einer Anzahl s vorhergegangener Versuche, Beobachtungen u. dgl. die mittleren Werthe K, K' u. s. w. näherungsweise *a posteriori* zu bestimmen, und zugleich die Genauigkeit dieser Bestimmung zu beurtheilen.

a) Sind die möglichen Werthe von x und ihre Wahrscheinlichkeiten bei allen s Versuchen dieselben, so wird man mit desto weniger Unsicherheit, je gröfser s ist, den mittlern Werth K von x näherungsweise $= \frac{1}{s}\Sigma \varepsilon_n$ setzen können, und nach Nro. 18 ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der bei dieser Bestimmung zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen

$$\mp\, t\, l \sqrt{\frac{2}{s}}$$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2}\, dt,$$

oder der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= 0.67744897 \frac{L}{\sqrt{s}}.$$

Der mittlere Werth des Quadrats des Fehlers ist nach Nro. 13, b) und 15, a) $= \frac{L^2}{s}$.

Eben so kann man nach Nro. 15, c) und nach Nro. 20. den mittlern Werth K' von x^2 näherungsweise $= \frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n^2$ setzen; der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist

$$= 0.67449 \sqrt{\frac{1}{s}(K''' - K'^2)}, \text{ u. s. w.}$$

Die Genauigkeit jener Bestimmung von K hängt von der Gröſse $L^2 = K' - K^2$ ab, wofür sich auf folgende Art ein genäherter Werth finden läſst:

Bezeichnen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots \lambda_s$ die Differenzen der einzelnen bekannten zufälligen Werthe von ihrem arithmetischen Mittel $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$, so ist

$$\lambda_n = \varepsilon_n - \frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n,$$

also $$\lambda_n^2 = \varepsilon_n^2 - \frac{2}{s} \varepsilon_n \Sigma \varepsilon_n + \frac{1}{s^2} (\Sigma \varepsilon_n)^2$$

und $$\Sigma \lambda_n^2 = \Sigma \varepsilon_n^2 - \frac{1}{s} (\Sigma \varepsilon_n)^2.$$

Setzt man hier für $\Sigma \varepsilon_n^2 - \frac{1}{s} (\Sigma \varepsilon_n)^2$ seinen mittlern Werth $= (s-1) L^2$ nach Nro. 15, f), so erhält man einen genäherten Werth von L^2

$$= \frac{\Sigma \lambda_n^2}{s-1},$$

wofür man, wenn s groſs ist, auch setzen kann

$$L^2 = \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n^2.$$

Oder: setzt man für K' seinen genäherten Werth $= \frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n^2$,

und für K seinen genäherten Werth $= \frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$, so erhält man

$$L^2 = \frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n^2 - \frac{1}{s^2} (\Sigma \varepsilon_n)^2 = \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n^2.$$

Oder: L^2 ist nach Nro. 12, b) der mittlere Werth von $(x - K)^2$, und kann daher nach Nro. 20. mit desto weniger Unsicherheit, je gröſser s ist,

$$= \frac{1}{s} \Sigma (\varepsilon_n - K)^2$$

gesetzt werden, wo $\varepsilon_n - K = \lambda_n$ ist, wenn man für K seinen genäherten Werth $= \frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$ substituirt.

Eben so findet man, daſs die Gröſse $K'' - K'^2$, von der die Genauigkeit der obigen Bestimmung von K' abhängt, näherungsweise $= \frac{1}{s} \Sigma \vartheta_n^2$ gesetzt werden kann, wenn man die Differenzen der Quadrate ε_1^2, ε_2^2, ... ε_n^2, ... von ihrem arithmetischen Mittel $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n^2$ resp. durch ϑ_1, ϑ_2, ... ϑ_n, ... bezeichnet.

b) Darf man nicht voraussetzen, daſs die möglichen Werthe von x und ihre Wahrscheinlichkeiten bei allen Versuchen dieselben seyen, und ist gar nichts über dieselben bekannt, so wird man nicht K_1, K_2 u. s. w., sondern nur $K = \frac{1}{s} \Sigma K_n$, $K' = \frac{1}{s} \Sigma K'_n$ u. s. w. aus den bekannten zufälligen Werthen von x bestimmen können.

Nun sey aber z. B. bekannt, daſs für einen jeden Werth der Wahrscheinlichkeit p die entsprechenden Werthe von x bei dem ersten, zweiten, ... n^{ten}, ... Versuche sich resp. verhalten wie 1, μ_2, ... μ_n, ..., wo μ_2, ... μ_n, ... bekannte Zahlen sind.

Da $K = Sxp$ und $K' = Sx^2p$ ist, so wird man haben

$$K_2 = \mu_2 K_1, \; \ldots \; K_n = \mu_n K_1, \; \ldots$$
$$K'_2 = \mu_2^2 K'_1, \; \ldots \; K'_n = \mu_n^2 K'_1, \; \ldots$$

und daher auch

$$L_2^2 = \mu_2^2 L_1^2, \ldots L_n^2 = \mu_n^2 L_1^2, \ldots$$

Dann läſst sich K_1 auf folgende Art näherungsweise bestimmen:

Multiplicirt man $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ resp. mit den Factoren $\gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$, und bezeichnet man

$$\varepsilon_1 + \gamma_2 \varepsilon_2 + \ldots + \gamma_n \varepsilon_n + \ldots \text{ durch } \Sigma \gamma_n \varepsilon_n,$$
$$1 + \gamma_2 \mu_2 + \ldots + \gamma_n \mu_n + \ldots \text{ durch } \Sigma \gamma_n \mu_n,$$

u. s. w.,

so ist nach Nro. 19. die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\Sigma \gamma_n \varepsilon_n \text{ zwischen } K_1 \Sigma \gamma_n \mu_n \mp t L_1 \sqrt{2 \Sigma \gamma_n^2 \mu_n^2}$$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

Wenn man also $K_1 = \frac{\Sigma \gamma_n \varepsilon_n}{\Sigma \gamma_n \mu_n}$ setzt, so ist eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$ vorhanden, daſs der bei dieser Bestimmung von K_1 zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen $\mp \frac{t L_1 \sqrt{2 \Sigma \gamma_n^2 \mu_n^2}}{\Sigma \gamma_n \mu_n}$ liege. Die Bestimmung von K_1 wird desto genauer seyn, je enger diese Grenzen bei derselben Wahrscheinlichkeit sind; daher muſs man, um K_1 auf's Vortheilhafteste zu bestimmen, die Factoren $\gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$ so wählen, daſs $\frac{\sqrt{\Sigma \gamma_n^2 \mu_n^2}}{\Sigma \gamma_n \mu_n}$ ein *Minimum* werde, oder daſs man habe

$$\Sigma \gamma_n \mu_n \Sigma \gamma_n \mu_n^2 d \gamma_n = \Sigma \gamma_n^2 \mu_n^2 \Sigma \mu_n d \gamma_n.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man

$$\gamma_2 = \frac{1}{\mu_2}, \ldots \gamma_n = \frac{1}{\mu_n}, \ldots$$

nimmt. Dann ist $\Sigma \gamma_n \mu_n = s$ und $\Sigma \gamma_n^2 \mu_n^2 = s$; man erhält also einen genäherten Werth von K_1

$$= \frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}$$
$$= \frac{1}{s}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\mu_n} + \cdots\right)$$

mit der wahrscheinlichen Unsicherheit

$$= 0.67449 \frac{L_1}{\sqrt{s}} = 0.67449 \sqrt{\frac{1}{s}(K'_1 - K^2_1)}.$$

α) Dasselbe vortheilhafteste Factorensystem läfst sich auch aus dem in Nro. 13, b) angeführten Grundsatze ableiten. Nämlich nach Nro. 16, b) ist der mittlere Werth M^2 des Quadrats des Fehlers, den man begeht, wenn man $K_1 = \frac{\Sigma \gamma_n \varepsilon_n}{\Sigma \gamma_n \mu_n}$ setzt, $= L^2_1 \frac{\Sigma \gamma^2_n \mu^2_n}{(\Sigma \gamma_n \mu_n)^2}$; daher wird M^2 am kleinsten, also nach jenem Grundsatze die Bestimmung von K_1 am genauesten, wenn man die Factoren so wählt, dafs $\frac{\sqrt{\Sigma \gamma^2_n \mu^2_n}}{\Sigma \gamma_n \mu_n}$ den kleinsten möglichen Werth erhält, wie oben.

Für $K_1 = \frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}$ ist $M^2 = \frac{1}{s} L^2_1 = \frac{1}{s}(K'_1 - K^2_1)$.

β) Da $K_n = \mu_n K_1$ und $L_n = \mu_n L_1$ ist, so ist auch die Wahrscheinlichkeit, dafs

$$\Sigma \gamma_n \varepsilon_n \text{ zwischen } \frac{K_n}{\mu_n} \Sigma \gamma_n \mu_n \mp t \frac{L_n}{\mu_n} \sqrt{2 \Sigma \gamma^2_n \mu^2_n}$$

liege, oder dafs, wenn man $K_n = \frac{\mu_n \Sigma \gamma_n \varepsilon_n}{\Sigma \gamma_n \mu_n}$ setzt, der Fehler dieser Bestimmung von K_n zwischen

$$\mp \frac{t L_n \sqrt{2 \Sigma \gamma^2_n \mu^2_n}}{\Sigma \gamma_n \mu_n}$$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt,$$

woraus erhellt, dafs auch zur Bestimmung von K_n das obige Factorensystem das vortheilhafteste ist. Man er-

hält so einen genäherten Werth von K_n

$$= \frac{\mu_n}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}$$

mit der wahrscheinlichen Unsicherheit

$$= 0.67449 \frac{L_n}{\sqrt{s}} = 0.67449 \sqrt{\frac{1}{s}(K'_n - K_n^2)}.$$

Dieſs gilt für jeden von den mittlern Werthen $K_2, K_3, \ldots K_s$.

γ) Eben so findet man einen genäherten Werth von K'_1

$$= \frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist

$$= 0.67449 \sqrt{\frac{1}{s}(K'''_1 - K'^2_1)},$$

u. s. w.

δ) Bezeichnet man die Differenzen der Gröſsen $\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}, \ldots \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}, \ldots$ von ihrem arithmetischen Mittel $\frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}$ resp. durch $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$, so ist

$$\Sigma \lambda_n^2 = \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2} - \frac{1}{s}\left(\Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}\right)^2.$$

Nun ist der mittlere Werth einer jeden von den Gröſsen $\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}, \ldots \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}, \ldots = K_1$, und der mittlere Werth des Quadrats einer jeden von denselben $= K'_1$, folglich der mittlere Werth von $\Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2} = s K'_1$, und der mittlere Werth von $\left(\Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}\right)^2 = s K'_1 + s(s-1) K^2$, also der mittlere Werth von $\Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2} - \frac{1}{s}\left(\Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}\right)^2$

$$= (s-1)(K'_1 - K_1^2) = (s-1) L_1^2.$$

Setzt man diesen mittlern Werth dem wahren zu-

fälligen Werthe $= \Sigma \lambda_n^2$ gleich, so findet man einen genäherten Werth von L_1^2

$$= \frac{\Sigma \lambda_n^2}{s-1}.$$

Oder: substituirt man für K'_1 seinen genäherten Werth $= \frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2}$, und für K_1 seinen genäherten Werth $= \frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}$, so erhält man einen genäherten Werth von $K'_1 - K_1^2$ oder von L_1^2

$$= \frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2} - \frac{1}{s^2} \left(\Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n} \right)^2 = \frac{1}{s} \Sigma \lambda_n^2.$$

Oder: $L_1^2 = \frac{L_2^2}{\mu_2^2} \ldots = \frac{L_n^2}{\mu_n^2} \ldots$ ist dem mittlern Werthe von $(x - K_1)^2$ bei dem ersten, oder von $\left(\frac{x - K_2}{\mu_2}\right)^2 = \left(\frac{x}{\mu_2} - K_1\right)^2$ bei dem zweiten, ... oder von $\left(\frac{x}{\mu_n} - K_1\right)^2$ bei dem n^{ten} Versuche ... gleich, und kann daher mit desto weniger Unsicherheit, je größer s ist, $= \frac{1}{s} \Sigma \left(\frac{\varepsilon_n}{\mu_n} - K_1\right)^2$ gesetzt werden, wo $\frac{\varepsilon_n}{\mu_n} - K_1 = \lambda_n$ ist, wenn man für K_1 seinen genäherten Werth $= \frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n}{\mu_n}$ substituirt.

Eben so kann die Größe $K'''_1 - K'^2_1$ näherungsweise $= \frac{1}{s} \Sigma \vartheta_n^2$ gesetzt werden, wenn man die Differenzen der Quadrate $\varepsilon_1^2, \frac{\varepsilon_2^2}{\mu_2^2}, \ldots \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2}, \ldots$ von ihrem arithmetischen Mittel $\frac{1}{s} \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{\mu_n^2}$ resp. durch $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n, \ldots$ bezeichnet.

22.

Hat man nach Nro. 21, a) unter der dortigen Voraussetzung aus einer Anzahl vorhergegangener Versuche

oder Beobachtungen den mittlern Werth von x näherungsweise bestimmt, so wird man diesen Werth auf künftige Versuche oder Beobachtungen anwenden können. Die dabei Statt habende Unsicherheit wird sich auf folgende Art bestimmen lassen:

Es sey $\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$ das arithmetische Mittel aus den zufälligen Werthen von x bei s vorhergegangenen Versuchen oder der aus denselben abgeleitete genäherte Werth von K, und $\frac{1}{\sigma} \Sigma \varepsilon_\nu$ das arithmetische Mittel aus den zufälligen Werthen von x bei σ künftigen Versuchen. Wendet man den Satz Nro. 19. an, indem man den Factor γ für jeden von den s ersteren zufälligen Werthen von x $= \frac{1}{s}$, und für jeden von den σ letzteren zufälligen Werthen von $x = -\frac{1}{\sigma}$ nimmt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n - \frac{1}{\sigma} \Sigma \varepsilon_\nu \text{ zwischen } \mp t L \sqrt{2\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\sigma}\right)}$$

liegen werde,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

Demnach ist die wahrscheinliche Unsicherheit der Annahme, daſs $\frac{1}{\sigma} \Sigma \varepsilon_\nu = \frac{1}{s} \Sigma \varepsilon_n$ seyn werde,

$$= 0.67449 L \sqrt{\frac{1}{s} + \frac{1}{\sigma}},$$

wo man die Gröſse $L^2 = K' - K^2$ aus den Differenzen der einzelnen zufälligen Werthe bei den s ersten Versuchen von ihrem arithmetischen Mittel näherungsweise bestimmen kann (s. Nro. 21, a).

Wenn z. B. die Wahrscheinlichkeit, bei einem gewissen Unternehmen diese oder jene Summe zu gewinnen oder zu verlieren, nicht *a priori* bekannt ist, und

wenn man bei vorhergegangener s maliger Wiederholung dieses Unternehmens im Ganzen die Summe $\Sigma\varepsilon_n$ gewonnen hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs der Gewinn bei σ maliger künftiger Wiederholung desselben Unternehmens von $\frac{\sigma}{s}\Sigma\varepsilon_n$ um weniger als $t L \sigma \sqrt{2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{\sigma}\right)}$ verschieden seyn werde,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

Ist $\sigma = s$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\frac{1}{s}\Sigma\varepsilon_n - \frac{1}{s}\Sigma\varepsilon_\nu \text{ zwischen } \mp \frac{2tL}{\sqrt{s}},$$

oder daſs $\Sigma\varepsilon_n - \Sigma\varepsilon_\nu$ zwischen $\pm 2tL\sqrt{s}$ liegen werde,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

23.

Bisher wurde vorausgesetzt, daſs die Anzahl der möglichen Werthe der unbestimmten Gröſse x eine bestimmte endliche sey. Bei manchen Untersuchungen ist aber die Sache x von der Art, daſs sie alle zwischen gewissen Grenzen liegende Werthe haben kann, wie z. B. die Dauer des Lebens oder einer Verbindung, der Fehler einer Beobachtung, der Stand des Barometers, Thermometers u. s. w. Dann wird die Wahrscheinlichkeit irgend eines Werthes von x unendlich klein seyn, weil die Anzahl der möglichen Werthe von x unendlich groſs ist. Die Wahrscheinlichkeit, daſs der Werth der unbestimmten Gröſse zwischen α und ω falle, wird $= 1$ seyn, wenn α und ω die Grenzen der möglichen Werthe sind. Die Wahrscheinlichkeit, daſs ihr Werth zwischen α und x falle, wo x eine innerhalb der Grenzen α und ω liegende Gröſse ist, wird < 1 seyn; diese Wahrscheinlichkeit sey $= Z$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, daſs

der Werth der unbestimmten Gröſse zwischen α und x' falle, wo x' zwischen dem vorigen x und der Grenze ω liegt, $= Z'$; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs ihr Werth zwischen x und x' liege, $= Z' - Z = \Delta Z$. Rücken x und x unendlich nahe zusammen, so verwandelt sich die Differenz ΔZ in das Differenzial dZ. Demnach wird die Wahrscheinlichkeit, daſs der Werth der unbestimmten Gröſse zwischen x und $x + dx$ liege, oder, was dasselbe ist, daſs er genau $= x$ sey, durch dZ ausgedrückt, wo Z eine Function von x ist, welche verschwindet für $x = \alpha$, und $= 1$ wird für $x = \omega$, und deren Werth für Werthe von x, die zwischen α und ω liegen, nothwendig zwischen 0 und 1 fällt. $\frac{dZ}{dx}$ wird im Allgemeinen ebenfalls eine Function von x seyn, die wir durch φx bezeichnen wollen; dann wird die Wahrscheinlichkeit, daſs die unbestimmte Gröſse einen gewissen Werth x habe, durch $\varphi x \,.\, dx$, und die Wahrscheinlichkeit, daſs ihr Werth zwischen gewissen Grenzen liege, durch das zwischen diesen Grenzen genommene Integral $\int \varphi x \,.\, dx$ ausgedrückt, da denn die Function φx so beschaffen seyn muſs, daſs das Integral $\int \varphi x \,.\, dx$ zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \omega$ genommen $= 1$ wird. Der mittlere Werth von x, der oben durch die auf alle mögliche Werthe von x sich erstreckende Summe Sxp ausgedrückt wurde, wird in dem jetzt betrachteten Falle durch das Integral $\int x \varphi x \,.\, dx$, von $x = \alpha$ bis $x = \omega$ genommen, ausgedrückt werden. Man hat also hier

$$K = \int_{\alpha}^{\omega} x \varphi x \,.\, dx.$$

Da $\varphi x \,.\, dx = dZ$ ist, und da $Z = 0$ ist für $x = \alpha$ und $Z = 1$ für $x = \omega$, so ist auch

$$K = \int_{0}^{1} x\, dZ.$$

woraus man durch particlle Integration findet

$$K = \omega - \int_a^\omega Z\,dx.$$

Diese Ausdrücke sind den in Nro. 5. gegebenen analog.

Die Wahrscheinlichkeit Y, daſs die unbestimmte Gröſse einen gewissen zwischen a und ω liegenden Werth x übersteige, oder daſs ihr Werth zwischen diesem x und der Grenze ω liege, ist $= 1 - Z$, und $dY = -dZ$; für $x = a$ ist $Y = 1$, und für $x = \omega$ ist $Y = 0$; daher hat man für den mittlern Werth von x auch die Ausdrücke:

$$K = \int_0^1 x\,dY \text{ (vergl. Nro. 4, a)},$$

$$\text{und} \quad K = a + \int_a^\omega Y\,dx \text{ (vergl. Nro. 4. b)}.$$

24.

Die Function φx oder Y oder Z ist gewöhnlich unbekannt. Es kann aber der Fall eintreten, daſs für mehrere einzelne Werthe von x die zugehörigen Werthe von Y (oder von Z) bekannt sind. So pflegt man z. B. die Wahrscheinlichkeit Y, daſs die Lebensdauer eines Menschen über einen Zeitraum x hinausgehe, für $x = 1$, 2, 3, 4 Jahre u s. w. als durch die Sterblichkeitstafeln bekannt anzunehmen. Überhaupt, was auch x seyn mag, wenn man aus vorhergegangenen Beobachtungen eine groſse Anzahl s zufälliger Werthe von x kennt, und wenn von diesen s zufälligen Werthen q über einem gewissen Werthe $x^{(n)}$ liegen, so ist der wahrscheinlichste diesem $x^{(n)}$ zugehörige Werth von Y, wie er aus diesen Beobachtungen folgt, $= \frac{q}{s}$, und die Genauigkeit dieser Bestimmung von Y wird desto gröſser seyn, je gröſser s ist. Es seyen nun für $r + 1$ Werthe von x, von denen jeder folgende gröſser sey als der vorhergehende, z. B.

$$\alpha,\ x',\ x'',\ x''',\ \ldots\ x^{(n)},\ x^{(n+1)},\ \ldots\ x^{(r-1)},\ \omega,$$

die zugehörigen Werthe von Y, von denen jeder folgende kleiner seyn wird als der vorhergehende,

$$1,\ Y',\ Y'',\ Y''',\ \ldots\ Y^{(n)},\ Y^{(n+1)},\ \ldots\ Y^{(r-1)},\ 0$$

bekannt. Dann entspricht die Bestimmung des Integrals $K = \int_0^1 x\,dY$ der Quadratur einer Curve, deren Gleichung unbekannt ist, von der aber für mehrere Abscissen $0,\ Y^{(r-1)},\ \ldots\ Y',\ 1$ die zugehörigen Ordinaten $\omega,\ x^{(r-1)},\ \ldots\ x',\ \alpha$ bekannt sind.

a) Betrachtet man jeden zwischen zwei nächsten von den bekannten Ordinaten, dem dazwischen liegenden Stücke der Abscissenaxe und dem dazwischen liegenden Bogen der Curve eingeschlossenen Flächenraum als ein geradliniges Trapezium, so erhält man einen genäherten Werth des Integrals $K = \int_0^1 x\,dY$

$$= \tfrac{1}{2}(1 - Y')(\alpha + x') + \tfrac{1}{2}(Y' - Y'')(x' + x'') + \tfrac{1}{2}(Y'' - Y''')(x'' + x''') + \ldots + \tfrac{1}{2}(Y^{(n)} - Y^{(n+1)})(x^{(n)} + x^{(n+1)}) + \ldots \ldots + \tfrac{1}{2}Y^{(r-1)}(x^{(r-1)} + \omega),$$

oder

$$= \tfrac{1}{2}[\alpha(1 - Y') + x'(1 - Y'') + x''(Y' - Y''') + x'''(Y'' - Y^{\mathrm{IV}}) + \ldots + x^{(n)}(Y^{(n-1)} - Y^{(n+1)}) + \ldots + \omega\, Y^{(r-1)}],$$

oder

$$= \tfrac{1}{2}[\alpha + x' + Y'(x'' - \alpha) + Y''(x''' - x') + \ldots + Y^{(n)}(x^{(n+1)} - x^{(n-1)}) + \ldots + Y^{(r-1)}(\omega - x^{(r-2)})].$$

Sind die zwischen je zwei nächsten von den bekannten Ordinaten liegenden Abscissenstücke $1 - Y'$, $Y' - Y''$, u. s. w. einander gleich, also jedes $= \frac{1}{r}$, d. h. sind die Wahrscheinlichkeiten $Y',\ Y'',\ \ldots\ Y^{(n)},\ \ldots$

$Y^{(r-1)}$ resp. $= \frac{r-1}{r}, \frac{r-2}{r}, \ldots \frac{r-n}{r}, \ldots \frac{1}{r}$, so wird

$$K = \frac{1}{r}\left(\frac{\alpha}{2} + x' + x'' + x''' + \ldots + x^{(n)} + \ldots + \frac{\omega}{2}\right).$$

Sind aber die Differenzen zwischen je zwei nächsten von den bekannten Ordinaten einander gleich, d. h. gehen die Werthe von x, für welche die zugehörigen Werthe von Y bekannt sind, in arithmetischer Progression fort, so daſs $x' = \alpha + \Delta x$, $x'' = \alpha + 2\Delta x$, ... $x^{(n)} = \alpha + n\Delta x$, ... $\omega = \alpha + r\Delta x$ ist, so erhält man

$$K = \alpha + \Delta x\left(\tfrac{1}{2} + Y' + Y'' + \ldots + Y^{(r-1)}\right).$$

Eben dieselben Ausdrücke lassen sich auch aus der Formel

$$K = \alpha + \int_{\alpha}^{\omega} Y\,dx$$

ableiten.

Auf diese Art pflegt man die mittlere Lebensdauer K eines Menschen. der eine gewisse Anzahl von Jahren alt ist, vermittelst der Sterblichkeitstafeln zu berechnen, welche die Wahrscheinlichkeit Y', Y'', ... $Y^{(n)}$, ... geben, daſs er nach einem, nach zwei, ... nach n Jahren, ... noch am Leben seyn werde; die constante Differenz Δx ist hier $= 1$ Jahr.

Eben so läſst sich die mittlere Dauer einer nur durch den Tod auflösbaren Verbindung zwischen zwei oder mehreren Personen berechnen, wenn man die Wahrscheinlichkeit Y', Y'', ... $Y^{(n)}$, ..., daſs sie nach einem, nach zwei, ... nach n Jahren, ... noch zusammenleben werden, als bekannt voraussetzt. Betrachtet man die Lebensdauer einer jeden als von ihrer Verbindung unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit $Y^{(n)}$, daſs sie nach n Jahren noch zusammenleben werden, gleich dem Producte aus den Wahrscheinlichkeiten, nach n Jahren noch zu leben, für eine jede von ihnen.

b) Eine andere Methode, einen genäherten Werth des Integrals $K = \int_0^1 x\,dY$ zu finden, besteht darin, daſs man durch die Endpuncte der bekannten Ordinaten der gedachten Curve eine parabolische Curve legt, und diese statt jener quadrirt, d. h. daſs man nach der *Lagrange*'schen Interpolationsmethode x als eine rationale ganze Function von Y ausgedrückt sucht, und dann von $Y = 0$ bis $Y = 1$ integrirt. Sind die Differenzen zwischen je zwei Werthen von Y, für welche die zugehörigen Werthe von x bekannt sind, einander gleich, so ist dieſs die *Cotes*'sche Integrationsmethode.

Diese Methode läſst sich auch auf die Formel

$$K = \alpha + \int_\alpha^\omega Y\,dx$$

anwenden, wofür man setzen kann

$$K = \alpha + (\omega - \alpha) \int_0^1 Y\,dt,$$

wenn man $t = \frac{x - \alpha}{\omega - \alpha}$ nimmt. Gehen die Werthe von x, für welche die zugehörigen Werthe von Y bekannt sind, nämlich

$$\alpha,\ x',\ x'',\ \ldots\ x^{(n)},\ \ldots\ \omega$$

in arithmetischer Progression fort, so daſs

$$x^{(n)} = \alpha + n\,\Delta x, \quad \omega = \alpha + r\,\Delta x$$

ist, so sind die entsprechenden Werthe von t

$$= 0,\ \frac{1}{r},\ \frac{2}{r},\ \ldots\ \frac{n}{r},\ \ldots\ 1,$$

und man kann sich zur Berechnung des genäherten Werths des Integrals $\int_0^1 Y\,dt$ der von *Cotes* in der *Harmonia mensurarum* gegebenen Tabelle bedienen, welche auch in der *Gauſs*'schen Abhandlung: *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, art.* 4, abgedruckt ist.

Bezeichnet z. B. Y die Wahrscheinlichkeit für einen 82jährigen Menschen, nach einem Zeitraume x noch zu leben, so entsprechen nach der *Süfsmilch-Baumann'*schen Sterblichkeitstafel den in Jahren ausgedrückten Werthen von x

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12$$

folgende Werthe von Y

$$1,\ \frac{7}{10},\ \frac{5}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{1}{10},\ 0.$$

Hier ist $\Delta x = 2$, $\alpha = 0$, $\omega = 12$, $r = 6$. Nach der *Cotes'*schen Tabelle mufs man nun die bekannten Werthe von Y nach der Ordnung resp. mit folgenden Coefficienten multipliciren:

$$\frac{41}{840},\ \frac{9}{35},\ \frac{9}{280},\ \frac{34}{105},\ \frac{9}{280},\ \frac{9}{35},\ \frac{41}{840}.$$

Die Producte addirt geben den genäherten Werth des Integrals $\int_0^1 Y\,dt = \frac{449}{1200}$; multiplicirt man diese Zahl mit 12, so erhält man K oder die mittlere Lebensdauer eines 82jährigen Menschen = 4.49 Jahre.

Nach der in a) gefundenen Formel:

$$K = \alpha + \Delta x\left(\tfrac{1}{2} + Y' + Y'' + \ldots\right)$$

ist $K = 4.60$ Jahre.

25.

Die oben für den Fall, wenn die Anzahl der möglichen Werthe von x eine endliche ist, bewiesenen Sätze werden offenbar auch auf den Fall einer unendlichen Anzahl anwendbar seyn, wenn man nur $\varphi x \,.\, dx$, dY und dZ an die Stelle von p, ΔY und ΔZ setzt, und statt des Summenzeichens S, das sich auf alle mögliche Werthe von x und ihre Wahrscheinlichkeiten bezieht, das Integralzeichen $\int$ gebraucht, wo die Integralien von $x = \alpha$ bis $x = \omega$, oder von $Y = 0$ bis $Y = 1$, oder von $Z = 0$ bis $Z = 1$ zu nehmen sind.

a) Zum Beispiel wenn fx eine gegebene Function von x bezeichnet, die so beschaffen ist, daſs allen zwischen α und ω liegenden Werthen von x reelle Werthe von fx entsprechen, so ist nach Nro. 10. und 11. der mittlere Werth von fx

$$= \int_\alpha^\omega fx \,.\, \varphi x \,.\, dx$$

$$\text{oder } = \int_0^1 fx \,.\, dY$$

$$\text{oder } = \int_0^1 fx \,.\, dZ,$$

oder, wenn man $\frac{d\,.\,fx}{dx} = f'x$ setzt,

$$= f\alpha + \int_\alpha^\omega Yf'x \,.\, dx$$

$$\text{oder } = f\omega - \int_\alpha^\omega Zf'x \,.\, dx.$$

So ist z. B. der mittlere Werth von x^2

$$= \int_\alpha^\omega x^2 \varphi x \,.\, dx = \int_0^1 x^2\, dY = \int_0^1 x^2\, dZ$$

$$= \alpha^2 + 2\int_\alpha^\omega Y \,.\, x \,.\, dx = \omega^2 - 2\int_\alpha^\omega Z \,.\, x \,.\, dx.$$

Sind für mehrere einzelne Werthe von Y oder von Z die zugehörigen Werthe von x, also auch von fx, gegeben, so läſst sich nach den in Nro. 24. angeführten Methoden ein genäherter Werth des Integrals $\int_0^1 fx \,.\, dY$ oder $\int_0^1 fx \,.\, dZ$ finden.

b) Nach Nro. 12, c, α) ist der mittlere Werth eines Aggregats von Gliedern wie $A x_1^a x_2^b x_3^c \ldots$ gleich einem Aggregate von Gliedern wie

$$A \int_{\alpha_1}^{\omega_1} x_1^a \varphi_1 x_1 \,.\, dx_1 \,.\int_{\alpha_2}^{\omega_2} x_2^b \varphi_2 x_2 \,.\, dx_2$$

$$.\int_{\alpha_3}^{\omega_3} x_3^c \varphi_3 x_3 \,.\, dx_3 \,\ldots\,.$$

c) Die in Nro. 13—22. bewiesenen Sätze über $\Sigma \varepsilon_n$, $\Sigma \gamma_n \varepsilon_n$, $\Sigma f \varepsilon_n$, $\Sigma \gamma_n f \varepsilon_n$ u. s. w. gelten auch für unsern jetzigen Fall, wenn man dabei K, K' u. s. w. in folgenden Bedeutungen nimmt:

α) Wenn das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werthe von x für alle s Beobachtungen dasselbe ist, so daſs für alle $\varphi x \,.\, dx$ die Wahrscheinlichkeit irgend eines Werthes von x ausdrückt, so ist

$$K = \int_\alpha^\omega x \varphi x \,.\, dx, \quad K' = \int_\alpha^\omega x^2 \varphi x \,.\, dx, \text{ u. s. w.,}$$
$$L^2 = K' - K^2.$$

β) Wenn das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werthe von x nicht dasselbe bleibt, und wenn allgemein für die n^{te} Beobachtung $\varphi_n x \,.\, dx$ die Wahrscheinlichkeit irgend eines Werthes von x ausdrückt, so ist

$$K_n = \int_\alpha^\omega x \varphi_n x \,.\, dx, \quad K'_n = \int_\alpha^\omega x^2 \varphi_n x \,.\, dx, \text{ u. s. w.,}$$
$$L_n^2 = K'_n - K_n^2,$$
$$\frac{1}{s} \Sigma K_n = K, \quad \frac{1}{s} \Sigma L_n^2 = L^2.$$

26.

a) Nach Nro. 18. ist die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\Sigma \varepsilon_n \text{ zwischen } \Sigma K_n \mp t\sqrt{2 \Sigma L_n^2}$$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

Setzt man hier $\varphi_n x = \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2 x^2}$, wo h_n eine Constante bezeichnet (welche Form der Function $\varphi_n x$ *Gauſs* in der *Theoria mot. corp. coel. Lib. II. Sect. III.* in Beziehung auf die Beobachtungsfehler angenommen hat), und $\alpha = -\infty$, $\omega = +\infty$, so ist $\int_\alpha^\omega \varphi_n x \,.\, dx = 1$. wie es nach Nro. 23. seyn muſs, ferner

$$L_n = \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-h_n^2 x^2}\, dx = 0\,.$$

$$L_n^2 = \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-h_n^2 x^2}\, dx = \frac{1}{2 h_n^2},$$

also die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\Sigma \varepsilon_n \text{ zwischen } \mp t \sqrt{\Sigma \frac{1}{h_n^2}}$$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} . \int e^{-t^2}\, dt\,.$$

Übrigens ist der in Nro. 18. gegebene Ausdruck nur ein genäherter, wobei vorausgesetzt wird, daſs die Anzahl s der Beobachtungen sehr groſs sey. Hingegen streng ist der in Nro. 17. gefundene Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit W, daſs $\Sigma \varepsilon_n$ zwischen $b-c$ und $b+c$ liege. Es ist nämlich

$$W = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P e^{-bz\sqrt{-1}} \,.\, \frac{1}{z} \sin. cz \,.\, dz,$$

wo

$$P = \int_a^\omega \varphi_1 x \,.\, e^{xz\sqrt{-1}}\, dx \,.\, \int_a^\omega \varphi_2 x \,.\, e^{xz\sqrt{-1}}\, dx \ldots$$

$$\ldots \int_a^\omega \varphi_s x \,.\, e^{xz\sqrt{-1}}\, dz$$

ist. Setzt man nun wieder $\varphi_n x = \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2 x^2}$, so ist das Integral

$$\int_a^\omega \varphi_n x \,.\, e^{xz\sqrt{-1}}\, dx = \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_n^2 x^2 + xz\sqrt{-1}}\, dx$$

$$\text{oder} \quad = \frac{2 h_n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h_n^2 x^2} \cos. xz \,.\, dx,$$

$$\text{d. h.} \quad = e^{-\frac{z^2}{4 h_n^2}}\,.$$

Demnach ist $P = e^{-\frac{z^2}{4} \Sigma \frac{1}{h_n^2}}$, also, wenn man $b = 0$ setzt, die Wahrscheinlichkeit, daſs $\Sigma \varepsilon_n$ zwischen $-c$ und $+c$ liege,

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}\Sigma\frac{1}{h_n^2}} \cdot \frac{1}{z} \sin. cz \,.\, dz,$$

$$\text{oder} \quad = \frac{2}{\sqrt{\pi\Sigma\frac{1}{h_n^2}}}\int e^{-\frac{c^2}{\Sigma\frac{1}{h_n^2}}} dc,$$

das Integral von $c = o$ an genommen,

$$\text{oder} \quad = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2} dt,$$

wenn man $c = t\sqrt{\Sigma\frac{1}{h_n^2}}$ setzt.

Man sieht hieraus, dafs bei dieser Annahme in Betreff der Form der Function $\varphi_n x$ der strenge Ausdruck in Nro. 17. dasselbe Resultat gibt, wie der genäherte in Nro. 18.

b) Eben so ist der strenge Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dafs $\Sigma\gamma_n \varepsilon_n$ zwischen $-c$ und $+c$ liege,

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P \,.\, \frac{1}{z} \sin. cz \,.\, dz,$$

wo

$$P = \int_{\alpha}^{\omega} \varphi_1 x \,.\, e^{\gamma_1 xz\sqrt{-1}} dx \,.\, \int_{\alpha}^{\omega} \varphi_2 x \,.\, e^{\gamma_2 xz\sqrt{-1}} dx \ldots$$

$$\ldots \int_{\alpha}^{\omega} \varphi_s x \,.\, e^{\gamma_s xz\sqrt{-1}} dx$$

ist. Setzt man wieder $\varphi_n x = \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2 x^2}$, so ist

$$P = e^{-\frac{z^2}{4}\Sigma\frac{\gamma_n^2}{h_n^2}},$$

also jene Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2} dt \quad \text{für} \quad c = t\sqrt{\Sigma\frac{\gamma_n^2}{h_n^2}}.$$

Dasselbe ergibt sich aus dem genäherten Ausdrucke in Nro. 18.

27.

Da die Anzahl der möglichen Werthe von $\Sigma\varepsilon_n$ unendlich groſs ist, so wird die Wahrscheinlichkeit, daſs $\Sigma\varepsilon_n - \Sigma K_n$ einen gewissen Werth u habe, unendlich klein seyn, und durch $\psi u \,.\, du$ ausgedrückt werden können; dann ist die Wahrscheinlichkeit, daſs $\Sigma\varepsilon_n - \Sigma K_n$ zwischen $-u$ und $+u$ liege,

$$= \int [\psi u + \psi(-u)]\, du,$$

das Integral von $u = o$ an genommen. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in Nro. 18. gefundenen, so sieht man, daſs

$$[\psi u + \psi(-u)]\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}\, dt$$

ist, wenn man $u = t\sqrt{2\Sigma L_n^2}$ nimmt.

Nun ist der mittlere Werth von $(\Sigma\varepsilon_n - \Sigma K_n)^2$, oder der mittlere Werth M^2 des Quadrats des Fehlers, den man begeht, wenn man $\Sigma\varepsilon_n = \Sigma K_n$ setzt,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, \psi u \,.\, du = \int_0^{\infty} u^2\, [\psi u + \psi(-u)]\, du;$$

also auch $M^2 = \dfrac{4\Sigma L_n^2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} t^2\, e^{-t^2}\, dt,$

d. h. $M^2 = \Sigma L_n^2,$

welcher Ausdruck in Nro. 16, a) auf eine andere Art gefunden wurde.

Eben so kann man den mittlern Werth irgend einer Potenz von $\Sigma\varepsilon_n - \Sigma K_n$, z. B. der m^{ten}, bestimmen; die so erhaltenen Ausdrücke werden aber nur genäherte seyn, auſser in dem Falle, wenn die Function φx die Form $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}$ hat. Strenge Ausdrücke findet man, wenn man $(\Sigma\varepsilon_n - \Sigma K_n)^m$ entwickelt, und den Satz Nro. 25, b) anwendet. Aber für $m = 2$ fällt, wie wir gese-

hen haben, der genäherte Ausdruck mit dem strengen zusammen.

Diefs läfst sich auch auf $\Sigma \gamma_n \varepsilon_n$, $\Sigma f \varepsilon_n$, $\Sigma \gamma_n f \varepsilon_n$ anwenden.

(Die Fortsetzung folgt.)

IV.

Über die Cissoiden der Curven;

von

L. C. Schulz v. Strasznicki,

Professor der Mathematik in Laibach.

I.

Da sich die Cissoide und die Conchoide durch ihre überaus leichte Construction vor allen andern Curven auszeichnen, dürfte die folgende Erweiterung des Begriffes beider krummen Linien den Liebhabern der Geometrie nicht ganz unwillkommen seyn.

Der Begriff der Cissoide läfst sich auf eine ähnliche Art verallgemeinen, wie diefs bereits mit der Conchoide, Cycloide u. s. w. geschehen ist; man kann nämlich die Direktrix, welche bei der gewöhnlichen Cissoide den Erzeugungskreis berührt, dem Pole (Spitze) der Cissoide entweder nähern oder entfernen, und indem man dieselbe Constructionsweise beibehält, erhält man dadurch die *verlängerte* oder *verkürzte* Cissoide. Es sey (Fig. 7) OV der Durchmesser des Erzeugungskreises, O der Pol der Cissoide, so entsteht die gemeine Cissoide (1,1), wenn man NV als Direktrix annimmt; man erhält die *verlängerte* (2,2), wenn die Direktrix AB den Erzeugungskreis schneidet, und endlich die *verkürzte* (3,3),

wenn die Direktrix $A'B'$ ganz aufserhalb des Kreises liegt. — Nennen wir die Entfernung der Direktrix vom Pole z. B. $OA = s$, und den Halbmesser des Erzeugungskreises r. Ist nun $OM = DB$, so ist M ein Punct der verlängerten Cissoide. Es sey nun $OP = x$, $PM = y$, so ist, da $DK = OP = x$ ist, auch $AQ = DK = x$, daher $OQ = s - x$, also $QV = 2r - s + x$, also $DQ = \sqrt{(s-x)(2r-s+x)}$; da nun $\frac{y}{x} = \frac{DQ}{OQ}$ ist, so hat man:

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{2r-s+x}{s-x}} \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{2r-s+x}{s-x}.$$

Die eben entwickelte Gleichung gilt nicht blofs für die *verlängerte*, sondern eben so gut auch für die *verkürzte* Cissoide, mit dem Unterschiede, dafs im ersten Falle $s < 2r$, im zweiten $s > 2r$ ist, was auf die Gestalt der Curve wesentlichen Einflufs hat. Setzt man $s = 2r$, so hat man

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x}{2r-x},$$

welches die Gleichung der gemeinen Cissoide ist. — Bei der gemeinen Cissoide wird für jedes negative x das y imaginär. Allein aus der Gleichung sehen wir, dafs bei der *verlängerten* jedem negativen x sogar zwei und zwar gleiche und entgegengesetzte Werthe entsprechen, sobald x numerisch kleiner als $2r - s$ ist; ist der numerische Werth des negativen x gleich $2r - s$, so ist dann $y = 0$. Man sieht daher, dafs die verlängerte Cissoide bei O einen Knoten hat, der desto gröfser wird, je näher die Direktrix dem Pole rückt. — Da bei der *verkürzten* Cissoide $2r < s$ ist, so wird nicht jedem positiven x ein reelles y entsprechen, sondern x mufs gröfser seyn als $s - 2r$; für $x = s - 2r$ wird $y = 0$; für jedes kleinere x, eben so auch für jedes negative x wird y

imaginär; nur $x = o$ gibt auch $y = o$, daher ist der Punct O in diesem Falle ein conjugirter Punct. — Bei keiner dieser drei Gattungen von Cissoiden kann $x > s$ werden, und für jede gibt $x = s$, $y = \infty$; es ist also überall die Direktrix eine Asymptote der Krummen. — Setzt man $s = o$, so geht die Cissoide in einen Kreis über, für dessen Centrum $y = o$ und $x = r$ ist. Nimmt man s negativ, so entsteht auf der andern Seite des Pols eine verlängerte Cissoide.

Nehmen wir nun in der allgemeinen Gleichung das Centrum des Erzeugungskreises als Anfangspunct an, und es sey t der Abstand der Direktrix vom Centrum, so hat man:

$$\frac{y^2}{(x+r)^2} = \frac{2r - t + x}{t - x}. \qquad \text{(A)}$$

Ist hier $t = r$, so hat man

$$\frac{y^2}{(x+r)^2} = \frac{r + x}{r - x}$$

für die Gleichung der gemeinen Cissoide. Nehmen wir aber nun den Pol der Cissoide im Centrum an, so ist dann die Gleichung der Curve, wenn r und t ihre Bedeutungen beibehalten:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2 - (t - x)^2}{(t - x)^2}. \qquad \text{(B)}$$

Um nun die Verallgemeinerung noch weiter zu treiben, nehmen wir den Pol der Cissoide in irgend einem Puncte des Perpendikels vom Pol auf die Direktrix, so ist, wenn c die Entfernung des Poles vom Centrum ist, und r und t ihre Bedeutungen beibehalten:

$$\frac{y^2}{(x-c)^2} = \frac{r^2 - (t + c - x)^2}{(t - x)^2}. \qquad \text{(C)}$$

Die Gleichung (C) ist hier die allgemeinste, und (A) und (B) sind nur specielle Fälle derselben; denn setzt man $c = -r$ in der Gleichung (C), so hat man

$$\frac{y^2}{(x+r)^2} = \frac{r^2-(t-r-x)^2}{(t-x)^2} = \frac{r^2-r^2+2r(t-x)-(t-x)^2}{(t-x)^2}$$
$$= \frac{2r-(t-x)}{t-x},$$

wie oben.

Setzt man hingegen in der Gleichung (C) das $c=o$, so hat man dann die Gleichung (B). Versetzt man in der Gleichung (B) den Anfangspunct, und setzt statt x, $x+t$, d. h. nimmt man den Anfangspunct dort an, wo die Direktrix die Abscissenaxe schneidet, so hat man

$$\frac{y^2}{(x+t)^2} = \frac{r^2-x^2}{x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2y^2}{(x+t)^2} + x^2 = r^2,$$

d. i. die Gleichung der gewöhnlichen Conchoide, wenn man x mit y vertauscht. — Man sieht daher, daſs die Gleichung (C) die Cissoiden und Conchoiden als specielle Fälle in sich faſst.

Bisher war die Erzeugungscurve ein Kreis. Nehmen wir nun eine Ellipse als solche an, und zwar sey der Anfangspunct im Centrum, es liege der Pol in der gröſsern Axe, und seine Entfernung vom Centrum sey C, die der Direktrix t, die Halbaxen a und b, und es stehe die Direktrix senkrecht auf der groſsen Axe, so ist dann die Gleichung dieser neuen Curve, die wir mit dem Gattungsnamen Cissoide bezeichnen wollen, folgende:

$$\frac{y^2}{(x-c)^2} = \frac{b^2\,[a^2-(t+c-x)^2]}{a^2\,(t-x)^2}.$$

Diese Gleichung geht in (C) über, sobald wir $a=b=r$ setzen. Es ergibt sich von selbst, daſs die letzte Gleichung die der elliptischen Conchoide als speciellen Fall in sich begreift, eben so gut als die elliptische Cissoide, die wieder verkürzt oder verlängert seyn kann, wo dann der Knoten sich um so mehr einer Ellipse nähert, je näher die Direktrix dem Pole kommt; fällt der Pol mit

der Direktrix zusammen, so wird dann die Curve eine gemeine Ellipse; denn setzt man $t = c$, so ist

$$\frac{y^2}{(x-t)^2} = \frac{b^2(a^2-(2t-x)^2)}{a^2(x-t)^2} \text{ oder } \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x-2t)^2}{a^2} = 1.$$

Auch bei dieser neuen Curve ist die Direktrix eine Asymptote.

Nehmen wir ferner die Parabel als Erzeugungscurve an, und es sey der Pol der Cissoide im Scheitel der Parabel, und die Direktrix stehe senkrecht auf der Achse, in einer Entfernung vom Scheitel $= t$, so ist, wenn $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel ist,

$$y^2 = \frac{px^2}{t-x}$$

die Gleichung der parabolischen Cissoide. Man sieht, daſs hier ebenfalls die Direktrix Asymptote ist. Ferner ergibt sich aus der Gleichung, daſs jedem noch so grossen negativen x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y entsprechen; was also bei der kreisförmigen und elliptischen Cissoide der Knoten war, ist hier eine aus zwei aus einander stehenden congruenten Ästen bestehende Curve, welche, je gröſser das x ist, sich um so mehr einer Parabel nähert; denn wird x so groſs, daſs t dagegen verschwindet, so hat man als Grenzgleichung $y^2 = px$. Es besteht also die parabolische Cissoide aus zwei getrennten congruenten Ästen, die sich im Pole durchschneiden; die zwei Stücke auf der einen Seite nähern sich ohne Ende einer Geraden, die auf der andern einer Parabel.

II.

So wie sich also für jede Curve eine Evolute, Evolvente, Rolllinie u. s. w. bestimmen läſst, so kann man auch für jede Curve die ihr als Erzeugungscurve entsprechende *Cissoide* suchen. Es versteht sich wohl von

selbst, daſs das Wort *Cissoide* als ein allgemeiner Gattungsname hier steht, ähnlich dem, wie die Geometer die Worte: Parabel, Hyperbel, u. s. w. generalisirt haben.

Um nun unsern Gegenstand allgemein zu ergreifen, sey $y' = f(x')$ die Gleichung der Erzeugungscurve (1,1) (s. Fig. 8), und t wieder der Abstand der Direktrix vom Pole der Cissoide, welchen wir zugleich zum Anfangspuncte wählen wollen. Es sey AB die Direktrix, die Gerade OB schneide die Curve (1,1) im Puncte D, so wird, wenn $OM = DB$ ist, M ein Punct der Cissoide seyn; es sey ferner $OP = x$, $MP = y$, ferner $OQ = x'$, $DQ = y'$, und DK senkrecht auf AB, so hat man:

$$\frac{y}{x} = \frac{DQ}{OQ} = \frac{y'}{x'} = \frac{f(x')}{x'}.$$

Nun ist $OQ = OA - AQ = t - x$, daher hat man als Gleichung der allgemeinen Cissoide:

$$\frac{y}{x} = \frac{f(t-x)}{t-x}.$$

Es sey z. B. 1) die Erzeugungscurve eine gleichseitige Hyperbel $y'^2 = x'^2 - r^2$, so hat man als Gleichung der hyperbolischen Cissoide, wenn im Centrum der Pol ist:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(t-x)^2 - r^2}}{t-x},$$

Nimmt man nun $t = r$, so ist dann:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{(x-2r)\,x}{(r-x)^2}.$$

Diese krumme Linie hat drei geradlinige Asymptoten, wovon die eine senkrecht auf die Abscissenaxe ist, die andern unter einem Winkel von 45° durch den Pol durchgehen.

2) Die Erzeugungscurve sey die von der Gleichung $y' = -x' + t$, so ist die Gleichung der entsprechenden Cissoide

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{t-x} \quad \text{oder} \quad x^2 + xy - ty = 0,$$

d. i. die Gleichung einer Hyperbel, wo die Coordinaten des Centrums $x = t$, $y = 2t$, und die Halbaxen $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ und $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ sind.

3) Es sey die Erzeugungscurve die gemeine Cissoide, so ist $f(x') = \sqrt{\frac{x'^3}{2r - x'}}$, wo hier r der Halbmesser des Erzeugungskreises ist. Man hat demnach, wenn der Abstand der Direktrix t seyn soll:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{t-x}\sqrt{\frac{(t-x)^3}{2r-(t-x)}} = \sqrt{\frac{t-x}{2r-t+x}}$$

$$\text{oder} \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{t-x}{2r-t+x}. \qquad \text{(D)}$$

Setzen wir nun in der letzten Gleichung das x negativ, d. h. zählen wir die x in entgegengesetzter Richtung, und setzen zugleich $s = 2r - t$, so hat man

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{2r - s + x}{s - x},$$

und diefs ist die Gleichung einer Cissoide, die, wie wir aus dem Vorhergehenden sehen, gegen die gegebene Cissoide verkehrt steht. — Diese Cissoide ist nun die verlängerte, gemeine oder verkürzte, je nachdem $s < 2r$, $s = 2r$ oder $s > 2r$, d. h. je nachdem t positiv, Null, oder negativ ist. — Die Cissoide der gemeinen Cissoide ist also wieder eine Cissoide in verkehrter Stellung. — Wir sehen also, dafs die Cissoide der Cycloide analog ist; so wie die Evolute der Cycloide wieder eine Cycloide ist, so ist die Cissoide der Cissoide wieder eine Cissoide. — Für $t = 0$ ist die Cissoide jeder Curve die ursprüngliche Curve in entgegengesetzter Lage selbst, wie dieses aus der Natur der Sache folgt, und aus obiger Gleichung

sich ergibt; denn für $t = o$ hat man

$$\frac{y}{x} = \frac{f(-x)}{-x}, \quad \text{daher} \quad -y = f(-x).$$

Würden wir in obiger Gleichung (D) das $t = 2r$ setzen, so hätten wir

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{t-x}{x} \text{ oder } \frac{y^2}{x} = t - x, \text{ d. h. } y^2 = x(t-x),$$

daher einen Kreis vom Durchmesser $= t$.

III.

Um nun unser vorgestecktes Ziel in voller Allgemeinheit zu erreichen, sey die Direktrix fernerhin nicht mehr eine gerade Linie, sondern irgend eine Curve, und zwar sey $y' = f(x')$ die Gleichung der Erzeugungscurve, und $y'' = \varphi(x'')$ die Gleichung der Direktrix. — Es sey in Fig. 9 (1,1) die Erzeugungscurve, (2,2) die Direktrix, O der Pol der Cissoide; ziehen wir nun die Gerade OB, welche die (1,1) in A, und die (2,2) in B schneidet, machen wir dann $OM = AB$, so ist M ein Punct der Cissoide. Es sey ferner $OP = x$, $MP = y$; $OQ = x'$, $AQ = y'$; $OR = x''$, $BR = y''$: so ersicht man leicht, daſs

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}, \quad y = y'' - y' \quad \text{und} \quad x = x'' - x'$$

ist. Will man daher aus den Gleichungen der Erzeugungscurve und der Direktrix die Gleichung der Cissoide finden, so wird man aus folgenden Gleichungen:

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x')}{x'} \quad \text{und} \quad y + f(x') = \varphi(x + x')$$

das x' eliminiren. — Wäre nun $y = \psi(x)$ die Gleichung der Cissoide, und man wollte aus der Erzeugungscurve und der Cissoide die Direktrix finden, so wird man aus den Gleichungen

$$\frac{\psi(x)}{x} = \frac{y'' - \psi(x)}{x'' - x} \quad \text{und} \quad y'' - \psi(x) = f(x'' - x)$$

das x eliminiren. — Ist endlich die Cissois und die Direktrix gegeben, so findet man die Erzeugungscurve, wenn man aus den Gleichungen

$$\frac{\psi(x)}{x} = \frac{y'}{x'} \quad \text{und} \quad \psi(x) + y' = \varphi(x + x')$$

das x eliminirt.

Ohne Beweis sieht man ein, dafs, wenn die gegebene Cissoïs ein Kreis, und die Erzeugungscurve eine gerade Linie ist, dann die gemeine Conchoide die Direktrix ist. — Allgemein, sobald die Direktrix eine gerade Linie ist, so erhält man, je nachdem man eine andere Erzeugungscurve annimmt, die verschiedenen Gattungen der Cissoiden; ist die Erzeugungscurve eine gerade Linie, und man nimmt für die Cissois einen Kreis, eine Ellipse, eine Parabel u. s. w. an, so ist die Direktrix eine kreisförmige, elliptische, parabolische u. s. w. Conchoide oder Cissoide, je nachdem man den Pol annimmt. Ist aber unter übrigens denselben Umständen die Erzeugungscurve ein Kreis, Ellipse u. s. w., so bekommt man die Conchoide auf kreisförmiger, elliptischer u. s. w. Basis.

Noch leichter aber lassen sich obige Probleme mittelst der Polarcoordinaten lösen. — Es sey (Fig. 9) $OM = r$, $OA = r'$, $OB = r''$, so mufs für was immer für einen Winkel φ, $r = r'' - r'$ seyn. Sind nun die Gleichungen zwischen r'' und φ, und r' und φ gegeben, so findet man sehr leicht die zwischen r und φ oder die Polargleichung der Cissoide.

Es sey die Erzeugungscurve ein Kreis, dessen Durchmesser $= a$, und der Pol sey in der Peripherie, so ist die Gleichung in Bezug auf Polarcoordinaten $r' = a . \cos. \varphi$. Es sey ferner die Direktrix eine Gerade, deren senk-

rechter Abstand vom Pole gleich a sey, daher die Gleichung der Geraden $r'' = \frac{a}{\cos.\varphi}$, so hat man dann

$$r = r'' - r' = \frac{a}{\cos.\varphi} - a . \cos.\varphi,$$

d. h. $r = a\left[\frac{1}{\cos.\varphi} - \cos.\varphi\right] = \frac{a . \sin.\varphi^2}{\cos.\varphi}$

für die Polargleichung der gemeinen Cissoide.

Es sey ferner die Cissoide ein Kreis, dessen Halbmesser $= a$ ist, so hat man, wenn der Pol im Anfangspuncte ist, dafür die Gleichung $r = a$; die Erzeugungscurve sey ein Kreis vom Durchmesser $= b$, dessen Peripherie durch den Pol durchgeht, so hat man $r' = b . \cos.\varphi$, daher

$$r'' = a + b . \cos.\varphi$$

die Gleichung der Conchoide auf der Kreisbasis.

Es sey ferner der Pol im Centrum einer Ellipse, deren Halbaxen a und b seyen. Diese Ellipse sey die Cissois, und die Erzeugungscurve sey auch eine Ellipse, welche so gestellt ist, dafs der Endpunct ihrer grofsen Axe im Pole liegt; ihre Halbaxen seyen p und q, so ist die Polargleichung der ersten Curve

$$r = \frac{a b}{\sqrt{a^2 . \sin.\varphi^2 + b^2 . \cos.\varphi^2}},$$

die der zweiten $r' = \frac{2p . \cos.\varphi . p q}{p^2 . \sin.\varphi^2 + q^2 . \cos.\varphi^2}$.

Man hat daher

$$r'' = \frac{a b}{\sqrt{a^2 . \sin.\varphi^2 + b^2 . \cos.\varphi^2}} + \frac{2p . \cos\varphi . p q}{p^2 . \sin.\varphi^2 + q^2 . \cos.\varphi^2},$$

d. h. die Gleichung der elliptischen Conchoide auf elliptischer Basis.

Obige Betrachtungen lassen sich auf alle die verschiedenen Gattungen von Conchoiden anwenden, und könnten vielleicht zu manchen andern Aufgaben den Weg bahnen.

V.

Neue und verbesserte physikalische Instrumente.

1. Feldstecher und aplanatische Loupen des Herrn *Plöſsl* in Wien.

Unter den in letzter Zeit von Hrn. Optikus *Plöſsl* verfertigten neuen kleinen optischen Apparaten verdienen seine Feldstecher und aplanatischen Loupen *) vorzügliche Aufmerksamkeit, sowohl wegen der früher nirgends erreichten Vollkommenheit, als wegen ihres vielfältigen gemeinnützlichen Gebrauches für Naturforscher, Künstler und Liebhaber.

Die oft gehörte Klage, daſs die besten Loupen, besonders jene, womit eine gröſsere Fläche übersehen werden soll, nur einen kleinen Theil des Gegenstandes in der Mitte scharf und klar, am Rande aber nur undeutlich und verwaschen zeigen, veranlaſste Hrn. *Plöſsl*, eine gröſsere solche Loupe aus zwei passend zusammengestellten achromatischen Linsen zu versuchen. Der Erfolg war auffallend; diese zusammengesetzte aplanatische Linse übertraf an gleichförmiger Deutlichkeit und Schärfe alles in dieser Art Vorhandene, und der ungetheilte Beifall, den die später verfertigten gröſseren und

*) Eine *Loupe* nennt man, nach dem von allen Physikern und in allen Lehrbüchern aufgestellten Sprachgebrauche, eine *gröſsere* einfache, oder auch die Wirkung einer einfachen Linse leistende, zusammengesetzte Linse von ½″ bis 2″ Durchmesser und mehr als einen Zoll weitem Brennpuncte, also höchstens von 6 bis 8maliger Vergröſserung. Kleinere Linsen mit stärkeren Vergrösserungen nennt man *einfache Mikroskope*, und diese können nicht wohl mehr in freier Hand gebraucht werden.

kleineren Loupen dieser Art bei Naturforschern und Künstlern fanden, zog zahlreiche Bestellungen nach sich, die sich noch immer erneuern. Hr. *Plöſsl* liefert sie zu folgenden Preisen in Conv. Münze:

1. Aplanatische Loupe, aus zwei achromatischen Linsen zusammengesetzt, von 1″ bis 2″ im Durchmesser, von 3- bis 4maliger Linear-Vergröſserung, in Messing gefaſst, in Futteral von Maroquin	5 — 9 fl.
2. Derlei aus zwei achromatischen Linsen von $^1/_2$″ — 1″ im Durchmesser, zum Auseinanderschieben, um sie auch einzeln zu gebrauchen, wie Doppelloupen, von 6- bis 9maliger Vergröſserung, in Elfenbein gefaſst	5 »

Eben so hat das vielfältige Verlangen, für Fuſsreisen und naturhistorische Excursionen aller Art ein kleines, leichtes Taschenperspektiv mit hinlänglicher Vergröſserung und Schärfe, dann einem nicht zu sehr beschränkten Gesichtsfelde, zu besitzen, um Gebäude, Gebirge, selbst Bäume, Menschen und Thiere noch auf bedeutende Entfernungen, selbst bis zu einer deutschen Meile, gut unterscheiden zu können, schon vor mehr als vierzig Jahren die berühmtesten Optiker Englands veranlaſst, sich darin zu versuchen. *Gregory* und *Wright* verfertigten zuerst solche Instrumente in bedeutenderer Vollkommenheit, die auch gewöhnlich nach ihnen benannt, und seitdem immer sehr gesucht und gerühmt wurden. Sie waren ganz von Messing, mit Deckeln, mit einem achromatischen dreifachen Objective von 15‴ Durchmesser, einem festen und zwei beweglichen Oculargläsern zum Übereinanderschieben, wodurch viererlei Vergröſserungen von 1 $^1/_2$, 3 $^1/_2$, 6 und 8 Mal linear entstanden, nebst einem Sonnenglase und manchmal ei-

ner kleinen Boussole im Deckel des Objectives. Ihre Länge war zusammengeschoben 2'' 9''', mit den drei Auszugröhren 5'' 9''', und sie wogen, ohne Boussole, zwischen 6 und 7 Loth. Die Erfinder lieferten sie um mäſsige Preise fabrikmäſsig *), um welche die übrigen Optiker London's sie nicht einzeln verfertigen wollten, und die berühmten Optiker *Ramsden* und *Dollond* fingen an, später ähnliche einfachere Feldstecher mit kleinen, nur 1'' groſsen Objectiven und zwei Ocularen zum Wechseln zu verfertigen, die gewöhnlich Vergröſserungen von 2 und 4 Mal linear gaben. Sie waren kleiner und leichter als die von *Gregory* und *Wright*, ganz silberplattirt, und von der bei diesen Künstlern gewohnten Vollkommenheit. Späterhin wurden von Paris aus gröſsere Instrumente dieser Art in Form von Theaterperspectiven mit gröſseren Objectiven, jedoch nur mit Vergröſserung von 4 bis 6 Mal, und von sehr ungleichem Werthe verbreitet. Auch verfertigte der ehemalige hiesige Optiker, Hr. *Schweigger*, solche sehr kleine gute Instrumente mit Objectiven von 9''' Öffnung und einem einfachen Ocular, die drei Mal vergröſserten.

Wiederholt aufgefordert, versuchte Hr. *Plöſsl* sich auch in diesen Feldstechern, und das erste Instrument dieser Art, für Se. kaiserl. Hoheit den durchlauchtigsten Erzherzog *Johann* bestimmt, übertraf die Erwartung auf eine überraschende Weise. Dieser Feldstecher ist ganz goldplattirt, mit einem Auszugrohre, einem Objective von 1'' Öffnung und 3 Ocularen, welche sich durch eine geriffelte Scheibe wechseln lassen. Die Vergröſserungen sind 4, 8 und 12 Mal linear, und die Schärfe und Klarheit bei einem verhältniſsmäſsig nicht unbedeutenden Sehefeld übertrifft nicht nur alles bisher bei glei-

*) Sie hatten, wenn wir nicht irren, ein Patent darauf genommen.

chen Dimensionen Geleistete, sondern auch die Instrumente von *Gregory* und *Wright*, *Ramsden* und *Dollond* auffallend.

Hr. *Plöſsl* verfertigte seitdem sehr viele derlei gold- und silberplattirte Feldstecher, dann auch derlei messingene mit Deckeln, einem Auszuge oder auch mit drei Auszügen. Alle sind von gleicher Vollkommenheit und solcher Schärfe, daſs die stärkste Vergröſserung Nro. 3 den Jupiter mit den Satelliten höchst rein und bestimmt, auch einige Doppelsterne klar darstellt; doch müssen sie dann mit einem Schraubenringe festgestellt werden. Die gold- und silberplattirten zeichnen sich durch Eleganz aus, die in Federn sich schiebenden messingenen dürften in Hinsicht der Dauerhaftigkeit der Centrirung den Vorzug verdienen. Da Gewicht und Volumen bei dem Zwecke, sie in der Tasche zu tragen, wichtige Umstände sind, so wird bemerkt: daſs die Feldstecher mit einer Auszugröhre Nro. 1, 2, 3 zusammengeschoben 3'' 3''', ausgezogen aber 4'' 9''' messen; Nro. 4 aber mit drei Auszugröhren zusammengeschoben nur 2'' 3''' miſst, ausgezogen aber die nämliche Länge von 4'' 9''' hat. Das Gewicht der gold- und silberplattirten sammt Futteral, dann der messingenen Instrumente sammt Deckeln mit einer Auszugröhre ist von 5 zu 5 1/2 Loth, der messingenen Instrumente mit drei Auszugröhren aber von 5 bis 6 Loth.

Das Sehefeld dieser Feldstecher ist, nach Maſsgabe der Entfernung, mit den Ocularen 1. 2. 3. beiläufig Folgendes: Auf 20° = 6', 4 1/2', 3'; auf 50° = 13', 10', 6'; auf 100° = 23', 16', 11'; auf 150° = 50', 30', 16'; auf 1200° = 30°, 20°, 12°; auf 4 bis 5000° = 100°, 80°, 20°; auf 6 bis 7 deutsche Meil. = wenigstens: 3400°, 3000°, 800°.

Um diese Feldstecher, so wie auch Zugperspective aller Art, bequem, selbst auf freiem Felde festgestellt,

gebrauchen zu können, sind leichte tragbare Pyramidalstative von Nufsbaumholz, zum Zusammenlegen, dann zum höher und niederer Stellen für stehende und sitzende Beobachter eingerichtet, sehr empfehlenswerth, indem sie nicht schwieriger zu tragen sind, als ein Regenschirm.

Die Preise in Conventions-Münze sind folgende:

1. Feldstecher mit einer Auszugröhre, ganz silberplattirt, einem achromatischen Objective von 1″ Öffnung und drei Ocularen zum Verschieben, von 4-, 8- und 12maliger Vergrösserung, in Futteral von Maroquin . . . . 15 fl.
2. Derlei ganz goldplattirt, in Futteral von Maroquin . . . . 18 »
3. Derlei von Messing mit Deckeln, in einem ledernen Beutelchen . . . . 15 »
4. Derlei von Messing mit Deckeln und drei Auszugröhren, in ledernem Beutelchen . . . 16 »
5. Kleiner Einschraubring für diese Feldstecher, welcher auch in das lederne Beutelchen hinein pafst . . . . 3 »
6. Leichtes tragbares Pyramidalstativ für Zugperspective und Feldstecher (zum Zusammenlegen und höher und niedriger Stellen eingerichtet), von polirtem Nufsbaumholz mit messingenen Scharnieren . . . . 4 »

2. Neue Luftpumpe. Von *K. T. Kemp.*

(Edinb. journ. N. VIII., p. 95.)

Die gewöhnlichen Hahnluftpumpen setzen, sobald die durch sie erreichte Luftverdünnung eine gewisse Grenze erreicht hat, dem weiteren Fortschreiten derselben dadurch eine Grenze, dafs beim Aufziehen des Kolbens keine Luft mehr aus dem Recipienten in den

Stiefel treten kann, weil die bereits zwischen dem Kolben und dem Stiefelboden befindliche Luft bei der gröfsten Erweiterung des inneren Stiefelraumes noch so viel Expansivkraft hat, als die im Recipienten. Ventilluftpumpen unterliegen zwar nicht diesem, aber einem anderen Gebrechen, welches davon herrührt, dafs die bis zu einem gewissen Grade verdünnte Luft die Klappe nicht mehr zu öffnen vermag. *Cuthbertson* hat diesem durch eine besondere mechanische Vorrichtung abgeholfen, mittelst welcher bei jedem Kolbenzug das Ventil zugleich mit dem Kolben bewegt wird, so dafs die Luft dieser Verrichtung ganz überhoben ist. So sinnreich auch der dazu angebrachte Mechanismus ist, so hält es doch schwer, mit einer auf solche Weise eingerichteten Luftpumpe die Luftverdünnung weit genug zu treiben, weil es fast unmöglich ist, die Klappen für die Dauer luftdicht zu machen, und weil das zu ihrem besseren Schlusse stets nöthige Öhl durch seine Dünste der weiteren Luftverdünnung entgegen wirkt.

Kemp schlägt nun eine Luftpumpe vor, welche von den letzteren Mängeln frei seyn soll, indem, wie bei *Cuthbertson's* Luftpumpen, die Ventile durch den Mechanismus der Pumpe bewegt werden, und der Schlufs derselben völlig vollkommen ist. Es ist kaum möglich, ersteres auf eine einfachere Weise zu erreichen, als es *Kemp* thut, denn die ganze Vorrichtung zur Bewegung der Ventile besteht darin, dafs er sogenannte Schwimmventile anwendet, die sich schliefsen und öffnen, so wie die Flüssigkeit, worin sie schwimmen, steigt oder sinkt. Die dazu verwendete Flüssigkeit ist das Quecksilber, welches überdiefs alle Sorge benimmt, dafs etwa ihre Dünste einen schädlichen Einflufs auf die Luftverdünnung ausüben könnten.

Fig. 10 und 11 stellen diese Luftpumpe vor, und

zwar erstere in der vorderen Ansicht, letztere im Durchschnitte. Gleiche Buchstaben bedeuten in beiden Figuren dasselbe. Das hölzerne Gestelle *IKXW* hat drei horizontale Querwände *RS*, *CD* und *IW*. Ganz unten befinden sich die zwei Stiefel *A*, *B* der Pumpe, die von Eisen seyn müssen, damit sie vom Quecksilber nicht angegriffen werden. Die Kolbenstangen *V*, *V* ziehen durch alle drei Querwände, und gehen oben in gezähnte Fortsetzungen über, welche es möglich machen, die Kolben mittelst eines Getriebes *D* und einer Kurbel zu bewegen; am obern Theil der Stiefel geht jede Stange durch eine luftdicht schliefsende Lederbüchse. Die oberste Querwand *IW* enthält den Teller für den Recipienten, und unter diesem befinden sich zwei Gefäfse *G* und *F*, welche diese Luftpumpe besonders charakterisiren, und als Hilfsgefäfse angesehen werden müssen. Sie mögen *Verdünnungsgefäfse* heifsen. Diese haben oben einen trichterförmigen Aufsatz mit einem Ventil, das sich von innen nach aufsen öffnet, und stehen sowohl mit dem Teller als mit den beiden Stiefeln in Communication, und zwar auf folgende Weise: In jedem dieser Gefäfse befindet sich eine Röhre, die der ganzen Länge nach durch dasselbe geht, und sich nahe am Boden desselben endet, wo sie aber mit einem Schwimmventil *M* versehen ist, das sich durch einen Druck von unten nach oben schliefst. Diese beiden Röhren *HH* laufen aufserhalb der Gefäfse, bevor sie sich in den Teller einmünden, in eine einzige zusammen, und durch sie stehen die Gefäfse mit dem Teller in Communication. Die Verbindung dieser Gefäfse mit den Stiefeln ist durch die Röhren *P*, *N* und *E* hergestellt. *P* verbindet den oberen Theil des Stiefels *A* mit dem unteren des Gefäfses *G*, und eben so setzt *N* den oberen Theil des Stiefels *B* mit dem unteren des Gefäfses *F* in Communication. Die Röhre *E* (Fig. 11)

vermittelt die Verbindung des unteren Theiles des Stiefels *A* mit dem unteren des Gefäſses *F*, und dasselbe thut eine ähnliche in der Zeichnung nicht sichtbare Röhre mit dem untern Theil des Stiefels *B* und dem Gefäſse *G*.

Um nun die Wirkung dieser Pumpe einzusehen, denke man sich den Kolben *R* des Stiefels *A* ganz hinaufgezogen, und den Kolben des Stiefels *B* am untersten Platze, so daſs bei der folgenden Drehung der Kurbel ersterer Kolben herab-, letzterer hinauf steigt, und setze voraus, es sey *A* nebst *E*, und der ober dem Kolben befindliche Theil des Stiefels *F* nebst der dazu gehörigen Röhre *N* mit Quecksilber gefüllt, und auch die Trichter *G* enthalten Quecksilber.

So wie der Kolben *R* sinkt, treibt er das Quecksilber aus *A* und *E* nach *F*, und dasselbe thut der steigende Kolben im Stiefel *B* mit dem ober dem Kolben und dem in der Röhre *N* befindlichen Quecksilber. Dadurch hebt sich das Ventil *M*, schlieſst die Röhre *H*, öffnet das Ventil *G*, und es wird aus dem Gefäſse *F* die Luft vertrieben. Sobald *R* sinkt, dringt das Quecksilber aus *F* durch die Röhre *P* in den ober *R* entstehenden leeren Raum, und es schlieſst sich das Ventil *G*. Sobald die Oberfläche des Quecksilbers unter *M* zu stehen kommt, sinkt das Schwimmventil *M*, es öffnet sich dadurch die Communication zwischen dem Gefäſse *F* und dem Recipienten, und letzterer liefert einen Theil seines Luftinhaltes nach *F*. Während dieses mit dem Kolben *R* vorgeht, erfolgt gerade das Entgegengesetzte mit dem Kolben des anderen Stiefels, und es wird immer durch eines der Gefäſse *F* und *G* Luft aus dem Recipienten geschöpft.

Es ist klar, daſs bei dieser Einrichtung die Klappe *M* entweder ganz offen steht, oder luftdicht durch das Quecksilber geschlossen ist, wie es der Bau einer guten Luftpumpe fordert.

VI.
Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Optik.

1. Farben durchsichtiger Körper. Von *Jackson.*

(Bibl. univ. Mai 1830, *p.* 11.)

Man erklärt sich häufig die Farbe eines durchsichtigen Körpers dadurch, dafs man annimmt, derselbe lasse nur Strahlen von einer bestimmten Farbe durch seine Zwischenräume hindurch, und absorbire oder reflectire die anderen. Dieser Erklärung, wenn man sie überhaupt als eine solche anzusehen geneigt seyn sollte, da sie im Grunde nur das Phänomen auf einen hypothetischen Boden versetzt, dessen Haltbarkeit in der neueren Zeit starke Erschütterungen erlitten hat, — dieser Erklärung stehen, der Erfahrung gemäfs, grofse Schwierigkeiten im Wege. Eine der vorzüglichsten ist wohl die, dafs z. B. das Licht, welches durch ein Glas gegangen ist, welches uns im durchgelassenen Lichte roth erscheint, sich violett zeigt, wenn es noch durch ein zweites blaues Glas gegangen, Dasselbe ist mit anderen Gläsern der Fall. So erscheint das Licht, welches zuerst durch ein rothes und dann durch ein gelbes Glas gegangen ist, orange, hingegen braun, wenn letzteres Glas blau ist. Wäre im rothen Glase alles Licht, mit Ausnahme des rothen, absorbirt oder reflectirt worden, so könnten die hinter das rothe gestellten Gläser nicht mehr farbig, sondern sie müfsten undurchsichtig erscheinen. Dieser Umstand bewog *Jackson*, eine andere Erklärung der Farben durchsichtiger Körper zu suchen, und er glaubt sie in Folgendem gefunden zu haben.

Durchsichtigkeit ist, nach ihm, eine Art des Seyns gewisser Körper, die ihnen gestattet, so viel Licht durchzulassen, als nöthig ist, um durch sie andere Körper zu sehen. Damit nun ein farbenloser Körper durchsichtig sey, dazu gehört eine bestimmte Disposition seiner kleinsten Theilchen und eine bestimmte Dicke der Masse. Die Nothwendigkeit der ersten Bedingnng beweisen viele Erscheinungen, wie z. B. daſs Eis durchsichtig, Schnee undurchsichtig ist; daſs ein in Masse durchsichtiger Krystall seine Durchsichtigkeit verliert, wenn man ihn in Pulverform versetzt. Die Nothwendigkeit einer gewissen Dicke der Masse zeigt sich in vielen Fällen. So ist z. B. selbst Gold in sehr dünnen Plättchen durchsichtig, Wasser hingegen in hinreichend dicken Schichten undurchsichtig. Wird nun ein farbenloser, durchsichtiger Körper mit einem oder mehreren sehr fein zertheilten undurchsichtigen innig vermengt, so wird zwar dadurch seine Durchscheinenheit wenig geändert, sobald er nur eine sehr geringe Dicke hat; aber er nimmt die Farbe der undurchsichtigen Beimengung an. Demnach ist ein farbiges Glas ein solches, welches eine hinreichend groſse Anzahl undurchsichtiger farbiger Theile in gleichförmiger Vertheilung in sich enthält, und die Intensität dieser Färbung ist der Anzahl solcher Theile proportionirt, hängt aber auch zugleich von der Natur der Farbe der undurchsichtigen Beimengung ab, indem verschiedenfarbiges Licht bei derselben Strahlenanzahl schon eine verschiedene Intensität hat. Demnach sendet ein durchsichtiger farbiger Körper, durch welchen man sieht, zweierlei Strahlen ins Auge, nämlich die weiſsen, welche durch die farblose durchsichtige Masse gehen, und die farbigen, welche von der undurchsichtigen Beimengung herrühren. Im reflectirten Lichte sehen darum oft solche Körper ganz dunkel oder

völlig schwarz aus, weil hier das durchgelassene weiſse Licht abgeht.

Hiemit glaubt es der Verfasser auch begreiflich gemacht zu haben, daſs zwei übereinander liegende Gläser, ein rothes und ein blaues, violett erscheinen, so wie ähnliche Erscheinungen mit farbigen Gläsern. Aus dem rothen Glase treten nämlich rothe und weiſse Strahlen zugleich aus. Ein Theil der weiſsen geht durch das blaue Glas unzersetzt, eben so ein Theil der rothen; ein anderer Theil der weiſsen und rothen Strahlen wird an der ersten Glasfläche reflectirt, ein dritter Theil der rothen erleidet an den blauen Theilchen der undurchsichtigen Masse des blauen Glases eine Absorption, und von einem Theile des weiſsen Lichtes wird nur der blaue Antheil an denselben Theilchen reflectirt. Es kommen demnach blaue, rothe und weiſse Strahlen zugleich ins Auge; die ersteren erzeugen die Empfindung der violetten Farbe, und letztere erhellen den Ton derselben.

2. Erzeugung des Vermögens, das Licht doppelt zu brechen durch Druck. Von *Brewster*.

(Edinb. journ. N. VII., p. 70.)

Brewster hat der königl. Societät zu London eine Abhandlung übergeben, worin er von den Mitteln spricht, durch welche man die doppelte Brechung künstlich hervorbringen kann. Eine kurze Anzeige des Inhaltes dieser Arbeit erhält die oben angezeigte Quelle, und wir säumen nicht, sie in diese Zeitschrift aufzunehmen, wiewohl zu erwarten ist, daſs des gelehrten *Brewster's* Abhandlung in den *Transact.* der genannten Societät ausführlich erscheinen wird, in welchem Falle sie dann eben so mitgetheilt werden könnte. Es wird aber nichts dadurch verloren, daſs hier in Kurzem von diesem wichtigen Gegenstande die Rede ist, ja der Leser wird da-

durch die Überzeugung gewinnen, wie begründet *Fresnel's* Ansicht über denselben Gegenstand ist, und wie sehr alle neuen Entdeckungen dazu beitragen, die Vibrationshypothese immer mehr zu befestigen.

Brewster hat schon vor mehreren Jahren gezeigt, daſs man die Phänomene der doppelten Brechung künstlich durch mechanische Mittel hervorbringen kann, aber es zeigten sich diese Phänomene von denen an Krystallen stets darin als wesentlich verschieden, daſs die doppelt brechende Kraft nicht wie bei letzteren eine Function des Winkels ist, den der einfallende Lichtstrahl mit einer oder mehreren gegebenen Axen macht. Im Jahre 1815 bemerkte derselbe Gelehrte die entpolarisirende Kraft dünner Plättchen, oder einer Mischung von Harz und weiſsem Wachs, die man zwischen zwei Glasplatten zusammengedrückt hat. Fortgesetzte Bemühungen über denselben Gegenstand führten ihn endlich zu dem glänzenden Ziele, von dem hier die Rede ist. Er änderte das Verhältniſs der Bestandtheile jener Mischung, beobachtete unter verschiedenen Umständen die Modificationen, welche die Erscheinungen der Entpolarisirung bei einem mit verschiedener Stärke angebrachten Druck erlitten, und fand, daſs es in jedem Puncte eine Axe der doppelten Brechung gebe, die auf der Ebene des Plättchens senkrecht steht, und daſs sich die Kraft der doppelten Brechung mit der Neigung des Strahles gegen diese Axe ändere, gerade so, wie es bei einaxigen doppelt brechenden Krystallen der Fall ist. Daraus schlieſst er, daſs die Eigenschaft einaxiger, doppelt brechender Körper den Theilen derselben bloſs durch eine Art Druck ertheilt worden sey, welcher auch durch die denselben eigene Anziehung bewerkstelliget seyn kann. Die Wirkung eines solchen Druckes hat Ähnlichkeit mit derjenigen, welche man erzielt, wenn man eine elastische Ku-

gel einer regelmäſsigen Compression aussetzt. Die Axe des Druckes wird die Axe der doppelten Brechung, und zwar eine positive (anziehende); eine Dehnung hingegen erzeugt eben so eine negative (abstoſsende) Axe.

Demnach glaubt *Brewster*, die Eigenschaft, das Licht doppelt zu brechen, komme nicht den kleinsten Theilen der Körper zu, welche diese Eigenschaft besitzen, sondern sie resultire von einem äuſseren Druck oder von der eine Druckkraft vertretenden Anziehung der Theile. Die Phänomene der Krystallisation und der Spaltung der Krystalle beweisen es, daſs die Theile eines Krystalls besondere Axen besitzen, nach welchen sie sich am stärksten anziehen, und nach welchen sie auch am festesten zusammenhängen. Er setzt voraus, geleitet durch die Erscheinungen an hemitropischen Gestalten, daſs diese kleinsten Theile eine sphärische oder sphäroidische Gestalt haben, und drei auf einander senkrechte Axen der genannten Art besitzen, die mit den geometrischen Axen der primitiven Gestalt in Relation stehen, und die Phänomene der doppelten Brechung beziehen sich auf dieselben Axen, und lassen sich nach den genannten drei Axen vollkommen genau berechnen. Demnach bestimmt die Gestalt der kleinsten, für sich bestehenden Theile der Krystalle innerhalb gewisser Grenzen die primitive Form, zu welcher sie sich verbinden, und sowohl die secundäre Gestalt als die doppelt brechende Structur gehen aus der Wirksamkeit der Kräfte jener Theile hervor.

Vorhin wurde gesagt, daſs diese Entdeckung *Brewster's* mit *Fresnel's* Theorie der doppelten Brechung in gutem Einklange stehe, und dieselbe noch mehr begründe. Dieser Theorie gemäſs hängen die Phänomene der doppelten Brechung von der Elasticität der kleinsten Theile ab, durch welche der schwingende Äther in seiner Expansivkraft auf besondere Weise modificirt

wird, welche Elasticität selbst wieder nur in der Kraft der Theile ihren Grund haben mufs. Die Erscheinungen der doppelten Brechung selbst verlangen die Annahme dreier Axen der Elasticität, ähnlich (aber nicht identisch) den drei Axen, von denen *Brewster* spricht, in jedem einzelnen Theile des doppelt brechenden Körpers, und aus diesem folget durch eine nicht besonders complicirte Rechnung die Gestalt der Welle in einem solchen Körper, aus welcher sich dann leicht die Richtung des auf die gewöhnliche und auf die ungewöhnliche Weise gebrochenen Strahls ergibt.

3. Periodische Farben gestreifter Flächen metallischer und durchsichtiger Körper. Von *Brewster*.

(*Phil. trans.* 1829. *P. II.*, *p.* 301)

Brewster wurde schon im Jahre 1822 durch die bekannten *Barton*'schen Irisknöpfe auf den Vorsatz gebracht, die Farben gestreifter Körper näher zu untersuchen, aber besondere Geschäfte hinderten ihn an der Fortsetzung dieser Arbeit, und der Umstand, dafs sich *Fraunhofer* mit diesem Gegenstande beschäftige, vermochte ihn gar, die Untersuchung ganz aufzugeben, und sie der überlegenen Kraft und den besseren Untersuchungsmitteln *(to superior powers and means of investigations)* dieses Gelehrten ganz zu überlassen.

Als *Yelin* nach Edinburg kam, und ihm *Brewster* das, was er bereits in diesem Gegenstand gethan hatte, zeigte, glaubte dieser in *Brewster's* Arbeit manches zu sehen, was *Fraunhofer* entgangen war, und so kam es, dafs Letzterer seine Untersuchung von Neuem begann, und sie so weit führte, als hier folgen wird.

Zieht man auf einer ebenen polirten Metallfläche gleichweit von einander abstehende Linien, und läfst di-

rectes Kerzenlicht darauf fallen, so sieht man im reflectirten Strahl, wenn die Reflexionsebene mit jenen Linien parallel ist, das farbenlose Bild der Kerze in der Mitte prismatischer Bilder, welche in einer auf jenen Linien senkrechten Ebene liegen. Das Hauptbild entsteht durch die zwischen den Linien befindliche, übrig gebliebene Metallfläche *m*, die prismatischen Bilder hingegen durch die Seiten der Furchen *n*; denn vergröſsert man *m*, und vermindert dadurch *n*, so verschwindet an einer gewissen Grenze dieser Gröſsen das erstere Bild völlig, nachdem es immer schwächer geworden ist, die prismatischen Bilder hingegen erreichen ihr Maximum. Der entgegengesetzte Erfolg tritt ein, wenn man *m* vergrössert und *n* verkleinert. Der Abstand beider Bilder von einander hängt ganz von der Gröſse $m+n$, d. h. von der Anzahl der Furchen und den sie trennenden Intervallen ab. Die Gesetze dieser Erscheinung sind übrigens von *Fraunhofer* mit aller Schärfe festgestellt worden. Bei einer näheren Untersuchung der prismatischen Bilder bemerkte *Brewster* an einigen geritzten Plättchen eine besondere Verminderung der prismatischen Farben, die ein Bild betraf, bei anderen aber unterblieb, und sich mit dem Einfallswinkel des Lichtes änderte. Oft zeigte sich dieses Phänomen bei groben, oft bei feinen geritzten Plättchen, und nur sein symmetrisches Vorkommen lieſs vermuthen, daſs es nicht vom Zufalle abhänge. Da, wo es am auffallendsten hervortrat, erschien selbst das gewöhnliche Bild schwach gefärbt, und jene Farbe änderte sich mit dem Einfallswinkel und stand mit der Verminderung der Farben in den prismatischen Bildern in einiger Beziehung. Wurde das Licht durch eine schmale rechtwinkelige Öffnung auf ein Plättchen geleitet, so, daſs man einen um 30° — 40° divergirenden

Lichtbüschel erhielt, so erschien das gewöhnliche Bild dieser Öffnung senkrecht auf die Länge der Furchen von breiten Farbenstreiſen durchkreuzet, deren Farben sich änderten, wenn man den Einfallswinkel von 0° — 90° wachsen lieſs, falls die Furchen einander so nahe standen, daſs deren 500 — 1000 auf einen engl. Zoll kamen. Ein Plättchen, wo $m + n = 0.001$ Z. betrug, erschien bei dem folgenden Einfallswinkel mit den dem Winkelwerthe beigesetzten Farben:

Weiſs	90°.	Aus Blaſsroth u. Blau zusammengesetzt . . .	75° 40′.
Gelb	80° ½.		
Röthlich Orange	77° ½.		
Blaſsroth *(pink)* .	67° 20′.	Brillantblau . .	47° 30′.
		Weiſslich . . .	71°.
		Gelb	64° 45′.
		Blaſsroth . . .	59° 45′.
Blau	56°.	Blaſsroth roth .	36°.
Bläulichgrün . .	54° 30′.	Weiſslichroth .	31°.
Weiſslichgrün .	51°.	Grün	24°.
Weiſslichgelb .	49°.	Gelb	10°.
Gelb	47° 15′.	Röthlich . . .	0°.
Blaſsröthlichgelb	41°.		

Dreht man die Platte um ihr Azimuth, so erscheinen bei demselben Einfallswinkel auch dieselben Farben, und ändern sich nicht, man mag die Entfernung der Lichtöffnung oder des Auges vom Plättchen wie immer abändern.

Andere Plättchen besaſsen zwar auch die Eigenschaft, von welcher bis jetzt die Rede war; doch erschienen bei einigen derselben drei Farbenordnungen, bei anderen zwei oder gar nur eine, während in einigen sich nur eine oder zwei Farben derselben Ordnung ent-

wickelten. Die ſolgende Tafel enthält einen genauen Ausweis über das Verhalten verschiedener Plättchen:

Zahl der Streifen auf 1 Zoll.	Farbe bei dem Einfallswinkel von 90° — 0°.
500	Citronengelb der ersten Ordnung.
625	Eine vollkommene Farbenordnung, und noch dazu Röthlichgelb der zweiten Ordnung. Alle sehr schwach.
1000	Vier vollständige Farbenordnungen.
1000	Eine vollständige Farbenordnung nebst Blau, Grün und Gelblichgrün der zweiten Ordnung.
1250	Eine vollständige Farbenordnung mit Blau und Bläulichgrün der zweiten Ordnung. Die Farben sehr schwach.
2000	Eine vollständige Farbenordnung nebst Blau, Grün und Grünlichgelb der zweiten Ordnung.
2000 in Wachs.	Eine vollständige Farbenordnung und Grünlichgelb der zweiten Ordnung.
2000 in Wachs.	Eine vollständige Ordnung nebst Gummiguttgelb der zweiten Ordnung.
2500	Eine vollständige Ordnung mit vollem Blau der zweiten Ordnung.
3333	Gummiguttgelb der ersten Ordnung.
5000	Eine vollständige Ordnung nebst Bläulichweiſs der zweiten Ordnung. Die Farben schwächer als in Nro. 5.
10000	Eine vollständige Ordnung mit Blau und einem schwächeren Blau der zweiten Ordnung.

Hier hing der Effect verschiedener Plättchen nicht von der Gröfse $m+n$, sondern nur von n ab, und je mehr von der ursprünglichen Fläche weggenommen war, desto heller erschienen die Farben, und desto mehr Ordnungen derselben kamen zum Vorschein.

Um zu sehen, welche Wirkung ein Plättchen gewähre, bei welchem die ursprüngliche Fläche fast ganz weggenommen wurde, verschaffte *Barton* dem Verfasser ein Plättchen mit 2000 Furchen auf den Zoll; allein weil die Diamantspitze, womit die Linien eingegraben wurden, brach, bevor noch eine hinreichende Anzahl solcher Linien gezogen war, liefsen sich nicht alle Versuche anstellen, die er anzustellen wünschte. Doch erlangte er damit für die Farben des Hauptbildes, das von der übrig bleibenden Metallfläche gebildet wurde, folgende Resultate, bei welchen vier vollkommene Farbenordnungen unter viel gröfseren Einfallswinkeln erschienen, als vorhin.

Weifs . . . . 90°.
Strohgelb.
Schwachroth.
Blafsroth.

Erste Grenze von Blafsroth und Blau . 80°.
Blau.
Grün.
Gelb.
Roth.
Blafsroth.

Zweite Grenze von Blafsroth und Blau 69° 40′.
Blau.
Grün.
Gelblichgrün.
Gelb.
Orange.
Scharlachroth.

Dritte Grenze von Blaſsroth und Blau . 48°.
Blau.
Hellgrün.
Gelblichgrün.
Gelb.
Röthlich . . . . 10°.

Die prismatischen Bilder gewährten die folgenden Phänomene, zu deren Verdeutlichung Fig. 12 dient. *AB* stellt das durch Reflexion entstandene Bild der viereckigen Öffnung vor, *a b*, *a′ b′* etc. die prismatischen Bilder, welche symmetrisch zu beiden Seiten von jenem entstehen. Die violette Stelle ist nach innen, die rothe nach auſsen gekehrt. Das Spectrum *a b* ist bei einem Einfallswinkel von 74° im violetten Theile bei *m*, bei einem Einfallswinkel von 66° im rothen Theile bei *n* unterbrochen, und die Unterbrechungsstellen der übrigen Farben fallen in die gerade Linie *mn* bei Einfallswinkeln, die zwischen 74°—66° liegen. Ähnliche Unterbrechungen erfolgen an den Stellen der übrigen Farbenbilder, welche durch die schwarzen schiefen Linien bezeichnet sind. Die Einfallswinkel, bei denen der violette Theil die Unterbrechung erleidet, sind für die in der Ordnung von innen nach auſsen auf einander folgenden Bilder 66° 20′; 57°; 48°; die für den rothen Theil hingegen 55° 45′; 41° 35′; 23° 50′.

An der Linie $\mu\nu$ findet im ersten Farbenbilde eine ähnliche Unterbrechung Statt, und dasselbe tritt an den Stellen der unteren ebenfalls schief gezogenen Linien in den übrigen Farbenbildern ein. Merkwürdig ist es, daſs die Linie $\mu\nu$ im ersten Spectrum bei demselben Einfallswinkel anfängt und aufhört, wo die obere Linie des dritten Spectrums eintritt und zu Ende geht. Eben so correspondirt dieselbe untere Linie im zweiten Spectrum der oberen im vierten Bilde. Dieses Phänomen sieht

man noch deutlicher aus der Figur 13, die einen Theil eines prismatischen Farbenbildes darstellt. *r r* ist der rothe, *gg* der grüne, *b b* der blaue, und *v v* der violette Theil desselben, und *mn* stellt die Linie vor, wo das Licht ausbleibt. Sie beginnt bei *m* im äufsersten Violett, und trifft demnach die Curve *a b m* (Fig. 14), welche die Stärke der Erleuchtung des Spectrums vorstellt, an der äufsersten Stelle. Weiter einwärts in das Spectrum trifft *mn* diese Linie iu *d*, und nimmt daselbst einen Theil des blauen und violetten Lichtes hinweg; eben so bleibt in *e* ein Theil des grünen und blauen, in *h* ein Theil des rothen und grünen, und bei *n* das äufserste Roth weg.

Eine ähnliche Unterbrechung des Lichtes findet im gewöhnlichen Bilde *AB* (Fig. 12) Statt. Die erste ist in *o* im violetten Lichte, die zweite in *p* im Roth, und die anderen liegen zwischen *o* und *p*, und beziehen sich auf die zwischen Roth und Violett liegenden Strahlen. Die erste Unterbrechungsstelle entspricht der bei *n n* in den prismatischen Bildern bei irgend einem Einfallswinkel.

Die zweite Unterbrechung des violetten Lichtes erfolgt in *q*, die des rothen in *r*, und hat bei demselben Einfallswinkel Statt, bei welchem die durch den oberen Streifen im ersten Farbenbilde angezeigte Unterbrechung des zweiten Spectrums erfolgt.

Die dritte Unterbrechung des violetten Lichtes ist in *s*, die des rothen in *t*, und diese fordert denselben Einfallswinkel, wie die vier Unterbrechungen im zweiten und vierten Spectrum. Doch sind bei allen diesen Erscheinungen *m*, *n*, μ, ν nur die Stellen der geringsten Lichtstärke oder des Maximums der Lichtabnahme; keine Farbe verschwindet gänzlich, sondern die schiefe Linie *mn* (Fig. 13) zeigt gleichsam die Lage eines besonderen Spectrums mit allen prismatischen Farben an.

Diese scheinbar sehr complicirten Phänomene erscheinen sehr einfach, wenn man sie im homogenen Lichte hervorbringt. Fig. 15 zeigt es, wie es sich im rothen Lichte darstellt. *AB* ist das Bild der rechtwinkeligen Öffnung, so wie es durch Reflexion des Lichtes an der zurückgebliebenen Stahlfläche des Plättchens entsteht, und die vier Bilder zu beiden Seiten desselben entsprechen den prismatischen Bildern. Die schattirten Rechtecke zeigen die Stellen an, wohin das Minimum neuer periodischer Farbenreihen fällt. Die Puncte p, r, t, n, ν entsprechen den eben so bezeichneten in Fig. 12. Würde Fig 15 violette Farbenbilder vorstellen, so hätten diese Puncte p, r, t, n, ν die Bedeutung der Puncte o, q, s, m, μ der Fig. 12. Übrigens zeigt diese Figur nur die Anordnung der Stellen der Minima; die Winkel, unter welchen das Licht einfallen mufs, damit das Minimum des äufsersten Roth des Farbenbildes an die in dieser Figur angezeichneten Stellen falle, sind in Folgendem enthalten:

Erstes Minimum: Hauptbild (p) 76°; erstes Spectrum (n) 66°, zweites Spectrum (n') 55° 45′, drittes Spectrum (n'') 41° 35′, viertes Spectrum (n''') 23° 30′.

Zweites Minimum: Hauptbild (r) 55° 45′; erstes Spectrum (ν) 41° 35′, zweites Spectrum (ν') 23° 30′.

Drittes Minimum (t): 23° 30′.

Dieselben Minima treten im violetten Lichte unter folgenden Winkeln ein:

Erstes Minimum: Hauptbild 81° 30′; erstes Spectrum 74°, zweites Spectrum 66° 20′, drittes Spectrum 57°, viertes Spectrum 48°.

Zweites Minimum: Ordentliches Bild 66° 20′; erstes Spectrum 57°, zweites Spectrum 48°.

Drittes Minimum: 48°.

Läfst man auf ein Plättchen, das 1000 Streifen auf

den Zoll hat, weiſses Licht fast senkrecht auffallen, so fließt das 5te, 6te, 7te und 8te prismatische Bild zu einer weiſslichen Lichtmasse zusammen, die nach auſsen an einen dunklen Raum grenzt. Läſst man den Einfallswinkel nach und nach immer gröſser werden, so vereinigen sich zuerst das 6te, 7te, 8te und 9te, dann das 7te, 8te, 9te und 10te Bild u. s. f., und der dunkle Raum, an den diese Lichtmasse grenzt, entfernt sich desto mehr von der Axe, je schiefer das Licht einfällt.

Der Abstand dieses dunklen Raumes von der Axe richtet sich aber auch nach der Natur des Mittels, durch welches das Licht auf die reflectirende Fläche gelangt, und ist überhaupt desto gröſser, je stärker dieses Mittel das Licht bricht. So betrug bei einem bestimmten Einfallswinkel des Lichtes dieser Abstand in der Luft 12° 23′, während er 17° 15′ betrug, wenn das Stahlplättchen mit Wasser, endlich gar 21° 22′, wenn es mit Cassiaöhl bedeckt wurde.

Bisher wurde stets ein mit parallelen Linien versehenes Stahlplättchen gebraucht; die Phänomene blieben aber dieselben, wenn man auch statt des Stahles Gold, Silber etc. anwendete. Es erübrigt aber noch, durchsichtige Körper statt solcher Metallplatten anzuwenden, um den Einfluſs der brechenden Kraft derselben auf die bisher besprochenen Phänomene kennen zu lernen. *Brewster* verschaffte sich zu diesem Ende gestreifte durchsichtige Plättchen aus Fischleim, indem er Plättchen dieses Materials auf ein geritztes Stahlplättchen drückte, und glaubte aus den Phänomenen, die sich bei ihrem Gebrauche zeigten, den Schluſs ziehen zu können, daſs bei übrigens gleichen Umständen durch Verminderung der brechenden Kraft des betreffenden Stoffes die Anzahl und Ordnung der Farben herabgesetzt werden, oder die Minima bei einem geringeren Einfalls-

winkel eintreten. Doch stand diesem Schlusse die Erfahrung im Wege, daſs durch das Trocknen des Fischleimes, wodurch offenbar dessen Brechungsvermögen erhöht wird, sowohl die Anzahl der Farbenperioden als der Einfallswinkel, bei welchem das Minimum eintritt, vermindert werde. Man konnte diese Wirkung allerdings auch dem Einflusse der Modificationen zuschreiben, welche die feinen Streifen beim Trocknen der Platte erleiden müssen, allein eben darum war man über die Einwirkung des Brechungsvermögens auf die hier in Rede stehenden Phänomene durch diese Erfahrungen nicht ins Klare gebracht. Unter solchen Umständen versuchte es *Brewster*, diesen Einfluſs daraus zu entnehmen, daſs er die gestreifte Stahlfläche mit verschiedenen Flüssigkeiten bedeckte, und zwar mit Wasser, Alkohol und mit Cassiaöhl, und die Modificationen kennen zu lernen suchte, welche durch jede derselben an den genannten Phänomenen hervorgebracht werden. Die Resultate seiner hierüber angestellten Versuche sind in Folgendem enthalten, wo der Kürze halber Wasser, Alkohol und Cassiaöhl nur mit den Anfangsbuchstaben W., A., C. bezeichnet wurden.

Zahl der Linien auf 1 Zoll	Maximum der Farbe ohne Flüssigkeit.	Maximum der Farbe mit Flüssigkeit.
312	Keine Farbe.	1. W. Stich ins Gelbe. 2. A. Stich ins Gelbe. 3. C. Schwach Röthlichgelb
500	Citronengelb der 1sten Ordnung.	1. W. Spur von Roth. 2. A. Schwach Nelkenbraun 3. C. Bläulich Nelkenbraun
625	Röthlichgelb der 2ten Ordnung.	1. W. Schwach Blaſsroth der 2ten Ordnung. 2. A. Detto. mehr braun. 3. C. Bläulichbraun der 2ten Ordnung.

Zahl der Linien auf 1 Zoll	Maximum der Farbe ohne Flüssigkeit.	Maximum der Farbe mit Flüssigkeit.
1000	Gelblichgrün der 2ten Ordnung.	1. W. Dunkelroth der 2ten Ordnung. 2. A. Hell Blaſsroth der 2ten Ordnung. 3. C. Grünlichblau der 3ten Ordnung.
1250	Schwach Bläulichgrün.	1. W. Gelb der 2ten Ordn. 2. A. Gelb Blaſsroth. 3. C. Gelblich Nelkenbraun
2000	Grünlichgelb der 2ten Ordnung.	1. W. Bräunlichroth der 2ten Ordnung. 2. A. Roth der 2ten Ordn. 3. C. Grünlichblau.
2500	Blau der 2ten Ordnung.	1. W. Schwach Grün. 2. A. Grünlichweiſs d. 1sten Ordnung. 3. C. Hell Gummiguttgelb.
3333	Gummiguttgelb der 1sten Ordnung.	1. W. Roth der 1sten Ordn. 2. A. Blaſsröthlich. 3. C. Lichtblau d. 2ten Ord.
5000	Bläulichweiſs der 2ten Ordnung.	1. W. Blaſsgelb. 2. A. Gelb, ins Orange spielend. 3 C. Gelblich Blaſsroth der 2ten Ordnung.
10000	Schön Blau der 2ten Ordnung.	1. W. Grünlichweiſs der 2ten Orduung. 2. A. Gelblichweiſs. 3. C. Hell Gummiguttgelb.

Gefurchtes Wachs gab dasselbe Resultat. Aus diesem allen folgt, daſs eine Verminderung des Brechungsvermögens die Anzahl der Farbenordnungen, und folglich auch die Höhe der Farbe bei demselben Einfallswinkel steigere.

Diese Versuche bezogen sich aber nur auf die Farbe des gewöhnlichen Bildes; für die prismatischen Bilder,

welche zu beiden Seiten von diesem erscheinen, mufste erst die Untersuchung angestellt werden. Dazu diente ein Plättchen mit 10000 Linien, welches das gewöhnliche Bild im Maximum des Blau der zweiten Ordnung zeigte, in den prismatischen Bildern aber keine Lichtunterbrechung bemerken liefs. Wurde dieses Plättchen mit einer dünnen Schichte Cassiaöhl gedeckt, so ging das Blau des Hauptbildes in Gummiguttgelb über, und es trat im ersten prismatischen Bilde jene Lichtunterbrechung ein, und diese Erscheinung soll an Schönheit alles, was *Brewster* bisher gesehen hatte, übertreffen.

An einigen Plättchen, wo *n* verhältnifsmäfsig sehr breit, *m* hingegen sehr schmal war, sah *Brewster* selbst in jenem Falle eine Unterbrechung der prismatischen Bilder, wo das Hauptbild farbenlos erschien. Dieses war z. B. bei einem Plättchen der Fall, welches 312, und bei einem anderen, welches 625 Streifen auf den Zoll hatte, doch erschien dabei mittelst eines Mikroskopes jede Gröfse *m* aus mehreren reflectirenden Stellen bestehend, die wegen ihrer Kleinheit im Stande waren, periodische Farben zu erzeugen. Wo hingegen die Grössen *m* und *n* nur wenig von einander verschieden sind, da zeigt sich stets eine schöne Übereinstimmung in der Lage der Minima des Hauptbildes und der prismatischen Nebenbilder, deren näheres Verhältnifs von dem der Gröfsen *m* und *n* abhängt.

Es war zu erwarten, dafs sich diese Phänomene nicht blofs im reflectirten, sondern auch im durchgelassenen Lichte zeigen werden. Die Durchsichtigkeit des gestreiften Plättchens aus Fischleim setzte *Brewster* in den Stand, auch dieses durch Versuche näher darzustellen und die Farben anzugeben, welche einander bei der Reflexion und Transmission entsprachen. Ein Plättchen,

das im reflectirten Lichte drei Farbenordnungen zeigte, gewährte im durchgelassenen nur folgende:

Schön blau.	Einfallswinkel 85°.
Purpurroth.	
Roth.	
Orange.	
Gelb.	Einfallswinkel 0°.

Zur besseren Vergleichung der im reflectirten und durchgelassenen Lichte erscheinenden Farben folgt hier ein Verzeichniſs beider Farben, wie sie *Brewster* mittelst eines sehr durchsichtigen Fischleimplättchens erhielt.

Reflectirtes Licht.	Durchgelassenes Licht.	Einfallswinkel.
Gelb.	Dunkelblau.	90°.
Orange.	Blaſser blau.	
Blaſsroth.	Blau.	
Erste Grenze von Blaſsroth und Blau.	Blau.	
Blau.	Blaſsroth.	
Grün.	Orange blaſsroth.	
Gelb.	Orange.	
Orange.	Gelb.	
Blaſsroth.	Gelb.	
Zweite Grenze v. Blaſsroth und Blau.	Gelb.	
Blau.	Gelb.	0°.

Man sieht hieraus deutlich, daſs nicht die complementären Farben einander entsprechen; der einzige directe Gegensatz zwischen beiden besteht darin, daſs die Helle der Farben im durchgelassenen Lichte mit dem Einfallswinkel abnimmt, während die der reflectirten zunimmt, wenn jener Winkel wächst. Merkwürdig ist die Veränderung, welche die Wirkung eines solchen Plätt-

chens mit der Zeit erleidet *Brewster* fand in dieser Beziehung an Plättchen, die bereits sechs Jahre alt geworden waren, folgende Resultate:

Ein Plättchen mit 1000 Streifen auf den Zoll, das die vorher beschriebenen Farbenphänomene gewährt hatte, zeigte nach sechs Jahren weder im durchgelassenen noch im reflectirten Lichte ein farbiges Hauptbild, und die Farben der prismatischen Bilder waren sehr schwach, das vierte konnte man kaum mehr sehen. Ein anderes Plättchen derselben Art zeigte nach sechs Jahren im reflectirten Lichte eine Farbenperiode, die beim Übergang des Einfallswinkels von einer bedeutenden Gröſse bis zum senkrechten Auffallen des Lichtes von Weiſs durch Gelb in Purpurroth überging. Im durchgelassenen Lichte sah man bloſs bei einem groſsen Einfallswinkel ein schwaches Gelb. Ein drittes eben so beschaffenes Plättchen mit besonders scharfen Eindrücken gab im reflectirten Lichte zwei Farbenreihen; die erste Grenze von Blaſsroth und Blau erfolgte bei einem Einfallswinkel von $57^{\circ}\ 45'$, die zweite nahe bei einem senkrechten Einfall des Lichtes; bei 10° erschien ein Blaſsroth. Im durchgelassenen Lichte zeigte sich bei dem gröſsten Einfallswinkel eine bläulich grüne Farbe, und ging bei Verminderung des Einfallswinkels durch Purpurroth in Gelb über. Alle diese Farben blieben bei demselben Einfallswinkel unverändert, man mochte das Azimuth wie immer wechseln.

Alle diese durchsichtigen Plättchen erhielten ihre parallelen Linien, mittelst welcher sie die besprochenen Farbenphänomene gewährten, von einem Stahlplättchen durch Abdruck. Weil dadurch letzteres stark gelitten hatte, so entschloſs sich *Brewster*, es mit einem Polirpulver abzuschleifen, und die dadurch bewirkten Veränderungen zu beobachten. Da durch diese mecha-

nische Veränderung der Oberfläche die Gröfse *n* vermehrt wurde, so war es kein Wunder, dafs die Farben des Hauptbildes verschwanden, aber auch die Farbenunterbrechung war nicht mehr wohl sichtbar, die weifse Lichtmasse verschwand, und die prismatischen Bilder erschienen wohl noch in derselben Entfernung vom Hauptbilde, doch nicht mehr in so grofser Anzahl.

Wird ein gefurchtes Fischleimplättchen *mn* (Fig. 16) auf eine Glasplatte *ABCD* gelegt, und mit derselben in optische Berührung gebracht, so erscheint dem in *df* befindlichen Auge quer über das von der Fläche *CD* reflectirte Bild eine Reihe von Farbenstreifen; sie rühren von den Strahlen *abcef* her, sind mit den Linien auf der Fischleimplatte parallel, und verlieren an Breite, so wie die Dicke *AC* der Glasplatte abnimmt. Kommen 1000 Linien am Plättchen *mn* auf einen Zoll, so erscheinen diese Streifen so deutlich wie die prismatischen Bilder. Bei einem Versuche dieser Art hatte die Glasplatte nahe die Dicke $^1/_{20}$ Z., und da schien ein Streifen jedes Bild zu durchschneiden; betrug diese Dicke mehr, so thaten dieses mehrere Streifen; betrug sie $^1/_7$ Z., so wurde sogar das Hauptbild durchkreuzet, bei $^1/_4$ Z. Dicke der Glasplatte aber das zweite Bild nicht mehr durchschnitten. Im ersten Falle, wo $AC = {}^1/_{20}$ Z. war, waren die beiden Wände des Plättchens einander nicht parallel, und es stand zufällig die Richtung der Streifen auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der zwei Glasflächen senkrecht, woraus dann von selbst folgte, dafs die vom Glase erzeugten Streifen den prismatischen, vom Fischleimplättchen herrührenden Bildern parallel seyn mufsten, und das Phänomen eine Änderung erleiden mufste, wenn das Plättchen *mn* auf *ABCD* gedreht wurde.

Den Grund aller dieser hier angeführten Erschei-

nungen wagt *Brewster* nicht anzugeben. Er glaubt, sie lassen sich nicht aus einer Beugung oder Interferenz des Lichtes an den Rändern der feinen Streifen erklären, weil sie sich nicht mit der Entfernung des leuchtenden Objectes und des Auges von ihrem Entstehungsorte ändern, auch die Farben nicht in Richtungen liegen, welche mit dem Zuge der Furchen parallel sind; es scheint vielmehr hier eine besondere Reflexion des Lichtes an der Grenze der Wirkungssphäre des reflectirenden Mittels, oder in einer geringen Entfernung von der Trennungsfläche beider Mittel im letzteren, und eine Interferenz des so reflectirten Lichtes vor sich zu gehen. Sind die Streifen *n* kleiner als der Halbmesser der Wirkungssphäre, so muſs durch Wegnahme eines Theils der Masse des Plättchens an den Vertiefungen die reflectirende Kraft vermindert werden, und dieses wird auch durch die Erfahrung bestätiget; denn die Wirkung einer Stahlfläche auf das Licht wird an der Stelle, wo Stahl an eine Flüssigkeit grenzt, so abgeändert, wie dieses nur von einer Verminderung der reflectirenden Kraft herrühren kann, und eine Verminderung der Gröſse *n* bewirkt gerade dasselbe. Auf einem Plättchen von 312 Streifen auf den Zoll entwickelt Cassiaöhl Farben, die vorher nicht vorhanden waren; mit einer Flüssigkeit von noch gröſserem Brechungsvermögen würde dasselbe auch noch erreicht werden können, wenn die Gröſse *n* sogar noch bedeutender wäre; käme gar das Brechungsvermögen dieser Flüssigkeit dem des Metalles nahe, so würden selbst ohne Ritzen an der Oberfläche des Metalles derlei Farben zum Vorschein kommen.

4. Über Farbenstreifen an Planspiegeln. Von *Quetelet.*

(Corresp. math. Tome V. 6 liv., und Tome VI. 1 liv.)

Whewell, Professor an der Universität zu Cambridge, hat zuerst bemerkt, dafs man mittelst eines Planspiegels Farbenstreifen erhalten kann, wenn man ein Kerzenlicht so vor demselben anbringt, dafs die reflectirten Strahlen desselben nur einen kleinen Winkel mit den auffallenden machen, und in das hinter dem Lichte befindliche Auge gelangen. Doch sieht man diese Erscheinung nicht immer, und es war nothwendig, die Bedingungen zu suchen, welche dieser Erscheinung entsprechen. Dieses hat *Quetelet* gethan, indem er zeigte, dafs man das Glas nur mit einer dünnen Dunstschichte überziehen dürfe, um genannte Phänomene zu erzeugen. Noch bessere Dienste leistet eine dünne Fettschichte, indem sie zugleich den Vortheil gewährt, dafs das betreffende Phänomen dauernd ist, und nicht, wie im vorhergehenden Falle, mit den Dünsten wieder verschwindet. Auch ist nach den Erfahrungen dieses Gelehrten dazu nicht einmal ein belegter Glasspiegel erforderlich, auch eine gewöhnliche Glasscheibe leistet dieselben Dienste, nur erscheinen die Farbenstreifen nicht so rein, woran offenbar die Ungleichheiten der Glasoberfläche Schuld sind. Ein Tropfen Terpentinöhl auf die hintere Glasfläche gegeben, macht aber das Phänomen augenblicklich verschwinden. Mit undurchsichtigen Stoffen läfst sich der Versuch nicht anstellen.

Übrigens erscheinen jene Streifen zur Seite des Bildes der Kerzenflamme, und zwar in einer Richtung, die auf der durch die Flamme und das Auge auf den Spiegel senkrecht gezogenen Ebene senkrecht steht; aber sie erscheinen nicht immer geradlinig; man unterschei-

det vom Bilde der Flamme aus einen bläulich grünen, einen gelben und einen rothen Streifen, u. s. f.

Je mehr man sich vom Spiegel entfernt, und je mehr sich das Auge dem Kerzenlicht nähert, oder überhaupt je kleiner der Winkel ist, den das einfallende Licht mit dem reflectirten macht, desto breiter werden die Farbenstreifen.

B. Magnetismus.

1. Über die Intensität des Erdmagnetismus zu Brüssel, Paris, London und Altona. Von *Quetelet.*

(Corresp. math. Tome VI. 1 liv. Bull. des sc. math. Mars 1830.*)*

Sabine und *Quetelet* haben schon im Jahre 1828 die Stärke des Erdmagnetismus zu Brüssel, London und Altona untersucht, und sich dabei eines Apparates bedient, wie ihn *Hansteen* zu brauchen pflegt, und wie er auch in *Pogg.* Ann. Bd. 3, S. 228 beschrieben ist; allein *Quetelet* hat die Berechnung dieser Gröſse neuerdings vorgenommen, und das Resultat von dem Wärmezustande der oscillirenden Magnetnadel unabhängig zu machen gesucht. Er bediente sich zu diesem Behufe der Formel, die *Sabine* zu gleichem Zwecke schon früher gebraucht hatte. Werden nämlich in T Secunden bei der Temperatur t^0 *F.* n Schwingungen vollbracht, so erfolgt dieselbe Anzahl Schwingungen bei der Temperatur t' in T' Secunden unter der Bedingung, daſs

$$T = T'(1 - 0.000165\,(t' - t))$$

ist. Werden mittelst dieser Formel alle Beobachtungsresultate auf 44° *F.* reducirt, so erhält man folgende Zahlen für die Zeit, in welcher 100 Schwingungen vollbracht wurden:

	Brüssel.	London.	Altona.
Nadel IV. . . .	349″.39.	352″.84.	351″.98.
» XI. . . .	309 .22.	312 .28.	311 .98.
» X. . . .	342 .61.	345 .40.	344 .98.

Nimmt man die Intensität des Erdmagnetismus zu London als Einheit an, und setzt voraus, der horizontal wirkende Theil des Erdmagnetismus stehe im verkehrten Verhältnisse der Quadrate dieser Zahlen, so erhält man diese Intensitäten:

	Brüssel.	Altona.	Paris.
	1.0198.	1.0049.	1.0732.
	1.0199.	1.0019.	1.0723.
	1.0163.	1.0024.	1.0726.
Mittel .	1.0187.	1.0031.	1.0727.

Die Schwingungswerthe für Paris sind aus den Londner *Transactions* 1828 entnommen. *Sabine* hat aber die Zahl 1.0727 nach anderen Versuchen für Paris auf 1.0714 herabgesetzt.

Aus *Hansteen's* Karte der isodynamischen Linien und *Sabine's* Beobachtungen erhält man folgende Zahlenwerthe, wobei t die Dauer von 100 Oscillationen, H die Intensität des horizontalen Theiles des Erdmagnetismus nach *Hansteen*, S denselben nach *Sabine* angibt:

Altona . . .	$t = 774''$,	$H = 1.0000$,	$S = 1.0000$.
Paris . . .	$t = 752''.2$,	$H = 1.0588$,	$S = 1.0681$.
Brüssel . .	— —	— —	$S = 1.0156$.
London . .	$t = 774''.5$,	$H = 0.9978$,	$S = 0.9969$.

Quetelet erhielt folgende Schwingungsdauer:

	Brüssel.	Altona.
Nadel I. . . .	392.13.	396.75.
» II. . . .	374.66.	379.39.

Daraus ergeben sich die Intensitäten des horizontal wirkenden Erdmagnetismus:

	Altona.	Brüssel.
Nadel I. . .	1.0000.	1.02360.
» II. . .	1.0000.	1.02374.

Demnach sprechen *Quetelet's* und *Sabine's* Beobachtungen dafür, daſs der horizontale Theil des Erdmagnetismus zu Brüssel gröſser sey, als zu London und Altona.

Findet man aus den Werthen der horizontalen Intensität mittelst der magnetischen Neigung die Gröſse des ganzen Erdmagnetismus, so erhält man, was folgt:

	Horizontale Intensität.	Neigung.	Intensität.
Paris . . .	1.0681.	67° 58′.	2.8471.
London . .	0.9969.	69° 45′.	2.8803.
Brüssel . .	1.0156.	68° 56′.5.	2.8265
Altona . .	1.0237.		2.8490.

2. Beobachtungen über die Stärke des Erdmagnetismus. Von Capitän *Sabine.*

(Quarterly Journ. Nr. XI., p. 14.)

Capitän *Sabine* hat auf seiner berühmten Reise um die Welt nebst mehreren andern wichtigen Beobachtungen auch Schwingungsbeobachtungen mit Magnetnadeln angestellt, um daraus auf die Vertheilung der magnetischen Kraft der Erde schlieſsen zu können. Die Resultate dieser Beobachtungen sind in seinem groſsen Werke *(Pendulum and others experiments)* enthalten, das dem litterarischen Erfolge seiner Reise überhaupt gewidmet ist; doch unterlieſs er, diese Resultate vom Einfluſs der Temperatur und des Schwingungsbogens auf die Schwingungsdauer der Magnetnadel zu befreien. Gegenwärtig hat er auch diese Reduction vorgenommen, und so die Dauer von einer bestimmten Anzahl Schwingungen, die

eine Magnetnadel in einer horizontalen Ebene machte, so dargestellt, wie sie bei einer Normaltemperatur und in unendlich kleinen Bögen erfolgen würden. Zur Correction wegen des Einflusses der Temperatur bediente er sich der im vorigen Aufsatze gebrauchten Formel, deren numerischer Coefficient aber nach der Natur der Magnetnadel modificirt wurde, und bei einer dieser Nadeln 0.0003, bei einer anderen 0.0004, bei einer dritten 0.00017 etc. betrug. Die Formel, durch welche er die Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bogen reducirte, war folgende:

$$T' = T\left(1 + \frac{\sin.(A+a) - \sin.(A-a)}{32\,M(\log.\sin.A - \log.\sin.a)}\right),$$

wo T die beobachtete Schwingungsdauer, A den anfänglichen Schwingungsbogen, a hingegen jenen bedeutet, unter welchem man die Schwingungen zu zählen aufhört, M endlich der Modulus der gewöhnlichen Logarithmen ist. Da er die Schwingungen stets zu zählen anfing, wenn der Ausschlagwinkel 30° betrug, und die Beobachtung beschlofs, wenn derselbe 10° betrug, so nahm jene Formel die Gestalt

$$T' = T + T \times 0.0065$$

an. Nach diesen Reductionen ergeben sich folgende Zahlen für die Dauer derselben Anzahl Schwingungen bei der Temperatur von 60° in unendlich kleinen Bögen:

Madeira am 12. Jänner 1822. Temperatur 63° *F.*

Nadel	3	brauchte	440″.8.
»	4	»	441″.0.
		Mittel	440″.9.

Teneriffa am 17. Jänner 1822. Temperatur 67°.

Nadel	4	brauchte	434″.8.
»	5	»	435″.6.
»	6	»	436″.6.
		Mittel	435″.7.

Port Praya. Cap. *Verd*'sche Inseln am 26. Jänner 1822. Temperatur 73°.

Nadel 4 brauchte 387″.3.
» 5 » 384″.7.
Mittel 386″.0.

Bathurst (am Gambia) am 4. Febr. 1822. Temp. 76°.

Nadel 4 brauchte 379″.3.
» 5 » 379″.3.
Mittel 379″.3.

Sierra Leone am 20. März 1822. Temperatur 80°.

Nadel 3 brauchte 371″.2.
» 4 » 369″.7.
» 5 » 371″.0.
» 6 » 372″.2.
Mittel 371″.0.

St. Thomas (Insel) am 20. Mai 1822. Temp. 84°.

Nadel 3 brauchte 363″.3.
» 4 » 364″.7.
» 5 » 367″.8.
» 6 » 365″.1.
Mittel 365″.2.

Ascension (Insel) am 7. Juli 1822. Temperatur 84°.

Nadel 4 brauchte 367″.5.
» 5 » 370″.8.
Mittel 369″.1.

Bahia am 26. Juli 1822. Temperatur 74°.

Nadel 3 brauchte 370″.8.
» 4 » 371″.7.
» 5 » 373″.0.
» 6 » 373″.5.
Mittel 372″.2.

Maranham am 28. August 1822. Temperatur 80°.

Nadel 4 brauchte 368″.9.
» 5 » 363″.6.
» 6 » 363″.9.

Mittel 365″.5.

Trinidad am 28. September 1822. Temperatur 68°.

Nadel 3 brauchte 363″.7.
» 4 » 367″.2.
» 5 » 363″.8.
» 6 » 364″.6.

Mittel 364″.8.

Jamaica am 28. October. Temperatur 80°.

Nadel 3 brauchte 354″.4.
» 4 » 355″.2.
» 5 » 355″.9.
» 6 » 358″.2.

Mittel 355″.9.

Grand Cayman (Insel) am 11. Nov. 1822. Temp. 84°.

Nadel 3 brauchte 358″.2.
» 6 » 361″.3.

Mittel 359″.7.

Havannah am 25. November 1822. Temperatur 80°.

Nadel 3 brauchte 365″.9.
» 4 » 364″.8.
» 6 » 365″.0.

Mittel 365″.2.

New-York am 27. December 1822. Temperatur 30°.

Nadel 3 brauchte 487″.7.
» 4 » 488″.1.
» 5 » 492″.1.
» 6 » 490″.3.

Mittel 489″.3.

Hammerfest am 16. Juni 1822. Temperatur 42°.

Nadel	3	brauchte	614″.2.
»	4	»	609″.2.
»	5	»	605″.2.
»	6	»	613″.6.
		Mittel	610″.5.

Spitzbergen am 17. Juli 1823. Temperatur 36°.

Nadel	3	brauchte	723″.9.
»	4	»	722″.6.
»	5	»	718″.7.
»	6	»	715″.5.
		Mittel	720″.2.

Grönland am 21. August 1822 (Pendulum Island). Temperatur 38°.

Nadel	3	brauchte	691″.2.
»	4	»	690″.3.
»	6	»	687″.7.
		Mittel	689″.7.

Drontheim am 21. October 1823. Temperatur 47°.

Nadel	3	brauchte	569″.4.
»	4	»	577″.3.
»	6	»	570″.7.
		Mittel	572″.5.

Bezeichnet nun T'' die Schwingungsdauer in einer horizontalen Ebene, T' dieselbe für Schwingungen um die Richtung einer frei schwebenden Magnetnadel in einer verticalen Ebene, D die magnetische Neigung, so hat man die Gleichung

$$T'' = \sqrt{T'^2 \cos. D},$$

und man findet, wenn man für D und T' die den vorher angeführten Stationen entsprechenden Zahlenwerthe setzt, folgende Resultate:

London . . .	T′ = 513″.0,	D = 70° 0′ 0″,	T″ = 300″.0.
Madeira . . .	= 440″.9,	= 61° 50′,	= 303″.0.
Teneriffa . .	= 435″.7,	= 59° 46′ 8″,	= 309″.1.
Port Praya .	= 386″.0,	= 45° 26′ 3″,	= 323″.3.
Bathurst . .	= 379″.3,	= 40° 23′ 1″,	= 331″.0.
Sierra Leone	= 371″.0,	= 31° 02′ 5″,	= 343″.4.
St. Thomas .	= 365″.0,	= 00° 02′ 5″,	= 365″.2.
Ascension .	= 369″.1,	= 05° 10′,	= 368″.4.
Bahia	= 372″.2,	= 04° 12′,	= 371″.7.
Maranham .	= 365″.5,	= 23° 06′ 2″,	= 350″.5.
Trinidad . .	= 364″.8,	= 39° 02′ 5″,	= 321″.5.
Jamaica . . .	= 355″.9,	= 46° 55′ 3″,	= 294″.1.
Grand Cayman	= 359″.7,	= 48° 48′ 3″,	= 291″.9.
Havannah .	= 365″.2,	= 51° 55′ 2″,	= 286″.8.
New-York .	= 489″.5,	= 73° 07′,	= 263″.8.
Hammerfest	= 610″.5,	= 77° 13′ 3″,	= 287″.1.
Spitzbergen	= 720″.2,	= 81° 10′ 5″,	= 282″.1.
Grönland . .	= 689″.7,	= 80° 12′,	= 284″.5.
Drontheim .	= 572″.5,	= 74° 42′,	= 294″.1.

Will man diese Beobachtungen der Intensitäten des Erdmagnetismus mit denen von *Humboldt* und *Hansteen* vergleichen, so mufs man für je zwei dieser Beobachtungsreihen ein gemeinschaftliches Verbindungsglied haben. *Sabine* hat alle magnetischen Intensitäten auf London bezogen, während *Humboldt* die seinigen auf Paris, *Hansteen* die seinigen auf Christiania als der gemeinschaftlichen Einheit reducirte. Sollen demnach die Beobachtungen aller drei Gelehrten mit einander verglichen werden, so müssen sie eine und dieselbe Einheit zum Grunde haben. *Sabine* hat schon im Jahre 1828 Beobachtungen über die Intensität des Erdmagnetismus zu Paris und London bekannt gemacht, die mit sechs Magnetnadeln angestellt wurden. Diese gaben für Pa-

ris folgende horizontale magnetische Kräfte die zu London als Einheit angenommen:

1.0722.
1.0675.
1.0731.
1.0726.
1.0709.
1.0717.

Diesem gemäſs würden dieselben Nadeln in horizontaler Richtung und in der einer Neigungsnadel zu Paris in folgenden Zeiten eben so viele Schwingungen machen, während sie in London diese Schwingungen in 300″ vollbringen.

Horizontale Vibration.	Vibration in der Richtung der Neigung.
495″.2.	302″.1.
494 .3.	302 .8.
493 .0.	302 .0.
493 .1.	302 .1.
493 .5.	302 .3.
493 .3.	302 .2.
493″.4.	302″.2.

Die Zahlen der letzteren Spalte sind nach der Neigung 67° 58′ für Paris, und nach 69° 49′ für London berechnet.

Sabine's Beobachtung in Trinidad und Teneriffa (10° 39′ nördl. Breite, 61° 35′ westl. Länge) läſst sich nun mit *Humboldt's* Beobachtung in Cumana (10° 27′ n. Breite, 64° 16′ w. Länge) vergleichen. Letzterer fand, daſs eine Magnetnadel um die Lage ihrer Neigung in 10 Minuten zu Paris 245, in Teneriffa 238, in Cumana 229 Schwingungen vollbrachte. Nimmt man nun an, die magnetische Kraft sey zu Paris, London, Teneriffa und Trinidad im Jahre 1822 von derselben Gröſse gewesen, wie

vor 24 Jahren (eine Annahme, die wohl nicht der Wahrheit im strengsten Sinne entspricht, aber für unseren Zweck vor der Hand beibehalten werden kann), so müfste die Magnetnadel, welche ihre Schwingungszahl in London in 300″, in Paris in 302″.2 vollbringt, der *Humboldt*'schen Beobachtung gemäfs in Teneriffa

$$\sqrt{\frac{302''.2 \times 245^2}{238^2}} = 311''.1,$$ in Cumana aber

$$\sqrt{\frac{302''.2 \times 245^2}{229^2}} = 323''.3$$ zu derselben Anzahl Oscillationen brauchen. Man hat demnach

für	London	300″,
»	Paris	302″.2,
»	Teneriffa 1799	311″.1,
»	Teneriffa 1822	309″.1,
»	Cumana 1799	323″.3,
»	Trinidad 1822	321″.5.

Die Magnetnadeln 4 und 8, mit welchen die magnetische Kraft zu London und Paris untersucht wurde, können auch zur Vergleichung der Beobachtungen *Hansteen*'s mit denen von *Sabine* gebraucht werden; denn ersterer liefs sie im Jänner und Mai 1828 in Christiania, letzterer im März und Juni desselben Jahres zu London oscilliren, und es ergaben sich für die mittlere Temperatur (49° *F.*) folgende Werthe der Schwingungsdauer:

C h r i s t i a n i a.

10. Jänner:	Nadel 4	brauchte	1097″.25;	Nadel 8	brauchte	886″.86.
1.—4. Mai:	» 4	»	1099″.11;	» 8	»	890″.67.

L o n d o n.

23. März:	Nadel 4	brauchte	1049″.26;	Nadel 8	brauchte	850″.96.
3. Juni:	» 4	»	1053″.80;	» 8	»	853″.7.

Durch Reduction beider Beobachtungen auf einerlei Zeit erhält man:

		Christiania.	London.
Nadel 4.	23. März . . .	1098″.25.	1049″.26.
	2. Mai	1099″.11.	1051″.76.
Nadel 8.	23. März . . .	889″.3.	850″.96.
	2. Mai	890″.67.	852″.46.

Nimmt man die horizontal wirkende magnetische Kraft zu London als Einheit an, so erhält man für Christiania

durch die Nadel 4	im März	.	0.9124,
	» Mai .	.	0.9157;
durch die Nadel 8	im März	.	0.9157,
	» Mai .	.	0.9160.
	Mittel	.	0.9147.

Nach *Hansteen's* Beobachtung war die magnetische Neigung zu Christiania im Frühling 1828 gleich 72° 16′.2, in London betrug sie zu derselben Zeit 69° 47′. Daraus findet man als Gröſse des Erdmagnetismus zu Christiania $\frac{0.9147 \times \cos. 69^\circ 47'}{\cos. 72^\circ 16'.2} = 1.0376$, und eine Nadel, welche eine bestimmte Anzahl Schwingungen zu London in 300″ vollbringt, braucht dazu in Christiania 294″.47.

Die Stationen, an welchen sowohl *Sabine* als *Hansteen* beobachteten, sind Drontheim und Hammerfest. Zu Drontheim fand *Hansteen* die Dauer von 300 Schwingungen gleich 866″.77 mit derselben Nadel, welche zu 300 Oscillationen in Christiania 816″ erforderte, und die magnetische Neigung war damals zu Christiania 72° 26′, in Drontheim 74° 42′. Aus jenen Werthen findet man die Dauer von 300 Oscillationen um die Lage der Neigungsnadel 448″.30 und 445″.30. Die Nadel, welche ihre Schwingungen zu London in 300″ vollbrachte, muſste demnach dazu in Drontheim 292″.5 brauchen. Im Jahre 1827 stellte *Keilhau* eine andere Vergleichung

zwischen dem Magnetismus zu Christiania und Drontheim an, und bediente sich dazu einer Magnetnadel, die er vorläufig mit *Hansteen's* Nadel zu Christiania verglichen hatte. Aus seinen Beobachtungen folgt für die Dauer der horizontalen Schwingungen 816″ und 869″.7, oder die der Schwingungen um die Lage der Neigungsnadel 448″.30 und 446″.8, woraus für die Nadel, die in London zu den betreffenden Schwingungen 300″ braucht, für Drontheim eine Schwingungsdauer von 293″.5 hervorgeht. Man hat daher für London

nach *Sabine*	im Jahre	1823 . .	294″.1,
» *Hansteen* »	»	1825 . .	292″.5,
» *Keilhau* »	»	1827 . .	293″.5.

Zu Hammerfest fand *Keilhau* die Schwingungsdauer im Jahre 1827 gleich 937″.4, während sie in Christiania mit derselben Nadel 816″ betrug, woraus sich mittelst der Neigung der Magnetnadel zu Hammerfest (77° 13′) die Schwingungszahlen für die durch den ganzen Erdmagnetismus bewegte Nadel 448″.30 und 440″.94 ergaben, und die Zahl, welche für Hammerfest 294″.47 zu Christiania, und 300″ zu London entspricht, ist 289″.6. Eine frühere Beobachtung gab für Hammerfest die Zahl 287″.6. Demnach erhält man

im Jahre	1825	. . . . . .	287″.6,
» »	1827	*(Keilhau)* . .	289″.6,
» »	1823	*(Sabine)*. . .	287″.1.

C. Electricität.

1. Über die physiologischen Wirkungen eines electrischen Stromes auf einen Frosch. Von *L. Nobili.*

(Bibl. univ. Mai 1830, p. 48.)

Electrische Versuche mit Froschschenkeln standen vor etwa 30 Jahren in grofsem Ansehen, und wurden

häufig angestellt, weil die Zuckungen, in welche ein solcher Schenkel durch den schwächsten electrischen Strom versetzt wird, ein sehr empfindliches Reagens auf diesen Strom abgeben, und man kein anderes, wenigstens kein empfindlicheres Mittel, einen solchen Strom zu entdecken, kannte. Seit der Entdeckung des Electromagnetismus, und besonders seitdem es dem Scharfsinne *Schweiggers* gelang, die Physiker mit einem so äufserst empfindlichen Mittel zur Untersuchung des Daseyns eines electrischen Stromes, wie sein Multiplicator ist, zu versehen, hat man Versuche mit Froschschenkeln fast ganz aufgegeben. Da trat *Marianini* auf, und zeigte, dafs solche Versuche aufser dem electro-dynamischen Nutzen noch einen anderen gewähren, indem sie uns eine besondere physiologische Wirkung der Electricität enthüllen, welche verschieden ist, je nachdem man den electrischen Kreis öffnet oder schliefst, und je nachdem die Electricität sich nach derselben Richtung fortpflanzt, in welcher der Nerv sich verzweiget, oder die Richtung des electrischen Stromes eine entgegengesetzte ist. Über diese Wirkungen hat nun *L. Nobili* neuerdings Versuche angestellt, und theils die Ergebnisse *Marianini's* bestätiget gefunden, theils neue Thatsachen und Ansichten gewonnen, deren Darstellung der Gegenstand dieses Artikels seyn wird.

Wenn man, sagt *Marianini*, einen Frosch so präparirt, dafs seine unteren Gliedmafsen mit dem Körper durch einen oder zwei Cruralnerven vereiniget bleiben, und dafür sorgt, dafs das Thier an den Eingeweiden keinen Schaden erleidet, es hierauf in den electrischen Strom bringt, so erfolgt eine Contraction der Gliedmassen beim Öffnen der Kette, unterbleibt aber beim Schliessen derselben, und der Obertheil des Körpers zeigt keine Spur einer Bewegung oder eines Schmerzes, wenn

der electrische Strom der Richtung der Verzweigung der Nerven entgegen geht, während das Umgekehrte eintritt, wenn der electrische Strom mit dem Nerv geht. Da erfolgt nämlich die Contraction in den Gliedmaſsen beim Schlieſsen der Kette, und Zeichen des Schmerzes in den oberen Theilen des Körpers beim Öffnen derselben. *Nobili* hat diesen Versuch wiederholt, und im Allgemeinen *Marianini's* Erfahrung bestätiget gefunden; doch gab es Fälle, wo das Thier sowohl beim Schlieſsen der Kette als beim Öffnen derselben Zeichen des Schmerzes äuſserte. Wurde einer der Drähte des Electromotors an irgend einer Stelle des Rückens oder Bauches des Frosches angebracht, der andere aber an einer anderen nahen Stelle desselben Theils, so daſs der Strom durch den Obertheil des Körpers gehen muſste, so traten jene Zeichen des Schmerzes immer ein, von denen *Marianini* spricht, und zwar in höherem Grade, als es bei einer anderen Anordnung der Polardrähte der Fall ist, ja sie dauern fort, wenn die electrische Kette geschlossen ist, der Strom mag was immer für eine Richtung haben. *Nobili* meint, das Thier leide in diesem Falle nicht bloſs durch die Fortpflanzung der Empfindung im Nerv, sondern durch die Wirkungen der Contractionen des Muskels. Um das, was hierbei Function des Nerves ist, besonders kennen zu lernen, ist nothwendig, mit einem einzelnen Nerv den Versuch anzustellen. Man weiſs, daſs die unteren Gliedmaſsen eines Frosches in Bewegung versetzt werden, wenn man einen isolirten Theil des Cruralnerven in die Kette bringt, man mag diese nun schlieſsen oder öffnen, und der Strom mag diese oder eine entgegengesetzte Richtung nehmen. Da befinden sich die unteren Gliedmaſsen auſserhalb der Kette, und die Erschütterung, welche sie erleiden, kann nur von der Fortpflanzung der Erregung im Nerv

nach der Richtung seiner Verästlung herrühren. Auf den Obertheil des Körpers kann dieses keine Wirkung haben, eine solche wird nur bemerklich, wenn dieser Theil des Körpers selbst in die Kette gebracht wird. Da afficirt der Strom den Nerv auf die gewöhnliche Weise, und die davon herrührenden Contractionen treten zugleich mit Zeichen von Schmerzen ein, welche von der Fortpflanzung dieser Bewegung durch die vorzüglich empfindlichen Eingeweide herrühren.

Die Phänomene, welche die Electricität in einem isolirten Cruralnerv hervorbringt, richten sich nach der natürlichen Reizbarkeit dieses Nerven. Man unterscheidet gewöhnlich die starke Excitabilität, bei welcher sich der Frosch bewegt, man mag die Kette schliefsen oder öffnen, von der schwachen, wo diese Bewegungen nur beim Öffnen oder beim Schliefsen der Kette eintreten; nach *Nobili's* Erfahrungen, die er an einigen hundert Individuen machte, mufs man aber nicht blofs diese zwei, sondern fünf Perioden unterscheiden. Man kann zwar dem electrischen Strom nur zwei verschiedene Richtungen geben, aber bei jeder einzelnen mufs man das Schliefsen und das Öffnen der Kette besonders beachten, und so kommt es, dafs man bei jedem Versuch dieser Art vier verschiedene Beobachtungen unterscheiden mufs. *Nobili* nennt der Kürze wegen den Strom, welcher vom Kopf des Frosches zu seinen Füfsen geht, den *directen*, den entgegengesetzten hingegen den *umgekehrten* Strom. Er stellt seine Versuche an Fröschen an, die er nach *Galvani's* Methode präparirt hat, aber er läfst dem Thiere nur einen Cruralnerv. Ein aus zwei Metallen bestehender Bogen dient als Electromotor. Bei den meisten Versuchen bestand dieser aus Kupfer und Platin, oder wenn er stärker wirken sollte, aus Kupfer und Eisen.

Die erste jener fünf Perioden dauert während der Zeit, als die Erregbarkeit des Thieres groſs ist. Wird dasselbe nach der genannten Weise präparirt, und, ohne Zeit zu verlieren, beide Ende des Nerves mit den zwei Enden des Doppelbogens aus Kupfer und Platin berührt, ferner Sorge getragen, daſs ja der Muskel nicht berührt wird, so erfolgt am Frosche eine Contraction, man mag die Kette öffnen oder schlieſsen; während der Zeit des Schlusses der Kette zeigt er aber keine Spur einer Bewegung, auſser derjenigen, welche von seiner Lebensthätigkeit herrührt. Die Contractionen, welche beim Schlieſsen der Kette erfolgen, sind meistens denen gleich, welche beim Öffnen derselben eintreten, manchmal sind sie aber schwächer, manchmal stärker, welche Unregelmäſsigkeiten offenbar vom Wogen der Erregbarkeit des Thieres abhängen.

Wenn der Frosch seine gröſste Vivacität eingebüſst hat, tritt die zweite Periode ein, und da nehmen die Contractionen beim Öffnen und Schlieſsen der Kette einen besonderen Charakter an, und sind von der Richtung des Stromes abhängig. Da treten nämlich bei Anwendung des directen Stromes beim Schlieſsen der Kette starke, beim Öffnen derselben schwache Contractionen ein. Mit einem verkehrten Strome erfolgt beim Schliessen der Kette nichts, beim Öffnen hingegen starke Contractionen.

Bei noch geringerer Erregbarkeit des Frosches tritt die dritte Periode ein. Da stellen sich durch den directen Strom beim Schlieſsen der Kette starke Contractionen ein, beim Öffnen derselben hingegen erfolgt keine Wirkung. Das Umgekehrte findet Statt, wenn ein verkehrter Strom angewendet wird, da unterbleibt nämlich beim Schlieſsen der Kette jede Wirkung, hingegen erfolgt eine starke Contraction beim Öffnen derselben.

In dieser Periode ergeben sich die wenigsten Unregelmäſsigkeiten der Wirkung.

Bei noch mehr gesunkener Vivacität des Thieres tritt endlich die vierte Periode ein. Da erzeugt ein directer Strom beim Schlieſsen der Kette eine Contraction, aber beim Öffnen derselben gar keine Wirkung; ein verkehrter hingegen bringt weder beim Schlieſsen der Kette noch beim Öffnen derselben eine Wirkung hervor, so daſs demnach in dieser Periode nur der directe Strom wirksam bleibt, und zwar auch nur beim Schlieſsen der Kette.

Die fünfte und letzte Periode tritt ein, wenn der vorher genannte Metallbogen gar keine Wirkung mehr hervorzubringen vermag. Es nimmt zwar die Feuchtigkeit des Nerves und mit dieser auch die electrische Leitfähigkeit desselben ab, aber man kann diesem Umstande allein das Unterbleiben der Wirkung nicht zuschreiben, weil die Zuckungen fast immer wieder eintreten, wenn man den electrischen Strom vom Nerv zum Muskel gehen läſst, und so die unteren Gliedmaſsen des Frosches in die Kette bringt. Doch ist dieses nur in relativem Sinne zu nehmen, wenn man sagt, der Nerv werde durch den electrischen Strom nicht mehr afficirt; denn wenn man einen stärkeren Electromotor nimmt, als jener ist, mit welchem man in den früheren Perioden die Wirkungen erregt hat, so können allerdings auch noch Zuckungen eintreten.

Nach dieser Darstellung der Thatsachen, welche *Nobili* erfahren hat, geht er zu theoretischen Betrachtungen über.

Der Nerv wird durch den electrischen Strom nicht desorganisirt, sondern nur in einen von seinem natürlichen abweichenden Zustand versetzt. Dieses beweiset ein von *Volta* herrührender Versuch, nach welchem ein

Frosch, der beiläufig eine halbe Stunde sich in der Kette einer *Volta'*schen Säule befand, und keine Zuckungen mehr erleidet, deren sehr lebhafte erleidet, sobald man den electrischen Strom in entgegengesetzter Richtung durch ihn gehen läfst. Befindet sich der Nerv längere Zeit in einem nicht natürlichen Zustande, so gewöhnt er sich gleichsam an seine neue Lage, und kann sogar einige Zeit in dem neuen Zustande verbleiben, wenn auch die Ursache, welche sie hervorbrachte, nicht mehr vorhanden ist. Daher kommt es, dafs, wenn man den Strom aufhören läfst, und ihn bald hierauf wieder in Gang setzt, dadurch keine Änderung hervorgebracht wird, so lange überhaupt die Nachwirkung des ersteren Stromes anhält. Ändert man aber die Richtung des Stromes, so gewinnt die ganze Sache ein anderes Gesicht. Der Nerv hat den Zustand angenommen, in welchen ihn der Strom seiner Richtung gemäfs versetzt; tritt aber derselbe mit entgegengesetzter Richtung ein, so trifft derselbe den Nerv nicht in dem Zustande an, in welchen er ihn zu versetzen sucht, und er bringt darum eine Wirkung hervor, und zwar eine desto gröfsere, je mehr sich der Nerv an den vorhergehenden Strom gewöhnt hat, und je weniger er daher der Wirkung des darauf folgenden gewachsen ist. Daher kann ein Frosch, der unter der Wirkung eines Stromes umgekommen ist, durch einen entgegengesetzten gleichsam wieder ins Leben zurückgerufen werden. Man kann zwar, so weit unsere Erfahrungen reichen, nicht bestimmen, worin der Zustand besteht, in welchen der Nerv durch einen electrischen Strom versetzt wird, sondern erkennt daraus nur, dafs durch entgegengesetzte Ströme auch verschiedene Zustände hervorgerufen werden. Der Nerv kann ohne Zweifel, seiner Structur gemäfs, gewisse Bewegungen in der Richtung seiner Verästlung fortpflan-

zen, und es reicht gewiſs hin, ihn so weit gebracht zu haben, daſs er gewisse Functionen in einer bestimmten Richtung fortpflanzt, um sich zu der Annahme für berechtiget zu halten, er erleide eine verschiedene Affection, je nachdem der ihn durcheilende electrische Strom diese oder die entgegengesetzte Richtung hat. Ist doch die Empfindung eines Thieres schon so verschieden, wenn man seine Haut mit der Hand streicht, je nachdem dieses Streichen gegen die Lage der Haare oder nach derselben erfolgt; und wiewohl der Bau der Nerven sich mit der Structur der behaarten Haut nicht vergleichen läſst, so kann man doch daraus abnehmen, welchen Einfluſs auf einen Nerv eine Affection haben muſs, wenn sie nach einer oder der entgegengesetzten Richtung erfolgt.

Aus dem bisher Dargestellten sieht man, daſs zwei entgegengesetzte Ströme eine verschiedene Einwirkung auf den Nerv ausüben, und ihn in verschiedene Zustände versetzen, welche anhaltend sind oder nicht, je nachdem die Einwirkung längere oder kürzere Zeit gedauert hat.

Die gewöhnlichen Zuckungen eines Frosches treten bekanntlich nur beim Öffnen oder Schlieſsen der Kette ein, und bleiben nach *Marianini's* Versuchen ganz aus, wenn man den Strom nach und nach auf den Frosch wirken läſst, und jede schnelle Änderung seines Zustandes vermeidet, woraus man ersieht, daſs die Electricität nur dann auf eine wirksame Weise den Nerv afficirt, wenn sie ihn schnell von einem Zustande in den anderen versetzt. Die stärkste Wirkung eines Stromes tritt ein, wenn die sich ablösenden Zustände am meisten von einander abweichen, und der Übergang von einem derselben in den anderen am schnellsten erfolgt.

Nach den bisher aufgestellten Grundsätzen glaubt

nun *Nobili* die Erscheinungen eines Frosches im electrischen Strome in den aufgezählten fünf Perioden beurtheilen zu müssen. Von diesen wird in dem folgenden Hefte die Rede seyn.

2. Über die Wirkung verdünnter Schwefelsäure auf Zink. Von *A. de la Rive.*

(Bibl. univ. Avril 1830, *p.* 391.*)*

Mit der Untersuchung beschäftiget, welche Zinkart sich am besten zur Construction *Volta*'scher Säulen eigne, wurde ich von einer Erscheinung überrascht, die ohne Zweifel schon den meisten Chemikern aufgefallen ist. Reiner, durch Destillation gewonnener Zink wird von verdünnter Schwefelsäure, besonders in den ersten Momenten, fast gar nicht angegriffen, und erst geraume Zeit nachher steigt eine kleine Menge Blasen von Wasserstoffgas, eine nach der andern, auf, während der gewöhnliche, verkäufliche (von Eisen und andern Substanzen verunreinigte) Zink unter denselben Umständen eine ungemeine Menge Wasserstoffgas erzeugt, das sich mit der Lebhaftigkeit und dem Aufbrausen entwickelt, deren Jeder, der diefs Gas einmal bereitet, sich wohl erinnern wird. Ich bemühte mich, die Ursache dieser Verschiedenheit aufzuspüren, und lege hier die erhaltenen Resultate vor.

Zwei Hauptumstände scheinen mir auf die Intensität der chemischen Einwirkung der Schwefelsäure auf das Zink Einflufs zu haben: die Beschaffenheit des Zinkes und der Grad der Verdünnung der Schwefelsäure. Zwar steigt diese Intensität auch mit dem Wachsen der Temperatur, allein innerhalb gewisser Grenzen, wie bei ungefähr 10° mehr oder weniger, ist dieser Einflufs so gering, dafs man ihn nicht immer zu berücksichtigen

braucht, ausgenommen in einigen Fällen, wo, wie man sehen wird, auch ich darauf Bedacht genommen habe.

Zuerst untersuchte ich nun, welche Mischung (von Schwefelsäure und Wasser) für das destillirte, und welche für das verkäufliche Zink die stärkste wäre, und in einer gegebenen Zeit die gröfste Menge Wasserstoffgas, oder eine gegebene Menge Wasserstoffgas in der kürzesten Zeit entwickelte. Ich nahm sechs Mischungen von der Dichte 1.137, 1.182, 1.215, 1.258, 1.326, 1.532, die folglich (nach *Dumas Traité de Chemie, T. I., p.* 182) in 100 Gewichtstheilen der Mischung

20.20, 25.64, 29.85, 35.28, 43.25, 64.20

Theile Schwefelsäure enthielten. Ich will diese Mischungen der Reihe nach mit 1. 2. 3. 4. 5. 6. bezeichnen. Jede dieser Mischungen wurde, eine nach der andern, in eine Flasche mit gut eingeriebenem Stöpsel gebracht, an dem eine Zinkstange befestiget war, die bald aus verkäuflichem, bald aus destillirtem Zinke bestand, und wo man nur Sorge trug, dafs immer eine gleich grofse Oberfläche mit der Flüssigkeit in Berührung kam. So oft man eine neue Zinkstange hinein gab, wurde auch die Flüssigkeit gewechselt, am Anfange und Ende eines jeden Versuches die Temperatur der Säure bestimmt, die Menge des entwickelten Gases aus dem Raume gemessen, den die durch dasselbe aus der Flasche verdrängte Flüssigkeit in einer mit derselben verbundenen, in gleiche Raumtheile getheilten Seitenröhre einnahm.

Die folgende Tafel zeigt an, welche Zeit bei Anwendung einer jeden dieser sechs Mischungen nöthig war, um ein Volumen Gas von 300 Millimetern zu erzeugen; die mit der Säure in Berührung stehende Oberfläche einer jeden der beiden angewandten Zinkarten war 200 Quadratmillimeter.

	Säure Nr. 1.	Säure Nr. 2.	Säure Nr. 3.	Säure Nr 4.	Säure Nr. 5.	Säure Nr. 6.
Verkäuflicher Zink . .	0′ 6″	0′ 3″	0′ 2″	0′ 3‴	0′ 4″	0′ 9″
Destillirter Zink . . .	3′ 30″	1′ 50″	0′ 30″	0′ 26″	0′ 24″	1′ 30″

Ich muſs bemerken, daſs diese Versuche alle bei derselben anfänglichen Temperatur der Flüssigkeit, zwischen 10° — 12° *C.*, gemacht wurden, und daſs die Temperatur während des Versuches desto höher stieg, je lebhafter die chemische Wirkung war, so daſs sie bei der Säure Nr. 3. in ungefähr 15′ um 5° wuchs. Ferner ist beachtenswerth, daſs die Gasentwicklung in den ersten Momenten der chemischen Einwirkung äuſserst langsam vor sich ging, aber dann allmählich, und zwar beim verkäuflichen Zink sehr schnell, und beim destillirten sehr langsam, an Geschwindigkeit zunahm, so daſs sie beim erstern in höchstens 10′, beim zweiten aber erst am Ende mehrerer Stunden ihr Maximum erreichte. Nur die Säure Nr. 6. macht eine Ausnahme; die Entwickelungsgeschwindigkeit für beide Zinkvarietäten war in ihr beim Anfange der chemischen Wirkung am gröſsten, und fing bald an sich zu vermindern.

Das Resultat obiger Versuche ist, daſs beim gewöhnlichen (unreinen) Zink die Lösung Nro. 3., die in 100 Gewichtstheilen 30 Theile Schwefelsäure und 70 Th. Wasser enthält, die gröſste Wirkung erzeuge, und überhaupt die zu diesem Zwecke tauglichsten Mischungen zwischen 25 — 50 Gewichtstheile Schwefelsäure enthalten müssen. Dieselben Mischungen werden auch beim destillirten Zink die besten Dienste leisten, wenn gleich hier, wie schon bemerkt, die Entwicklung viel langsamer vor sich geht, nur daſs sich hier das Maximum nicht so genau ausmitteln läſst, und auf Nr. 5. zu fallen scheint, und daſs Nr. 6. auf dasselbe eine viel stärkere Wirkung

ausübt als Nr. 1., was sich beim gewöhnlichen Zink umgekehrt verhielt.

Worin liegt nun diese auffallende Verschiedenheit zwischen dem gewöhnlichen und dem destillirten Zink? In der verschiedenen Dichtigkeit, könnte man beim ersten Anblicke glauben, denn das destillirte Zink scheint viel compacter, leistete daher der Säure mehr Widerstand, indefs die anscheinend poröse Structur des verkäuflichen Zinks der Flüssigkeit einen leichtern Zugang zu den kleinsten Theilchen des Körpers gestattet; allein ich habe mich genau überzeugt, dafs der destillirte und der unreine Zink dieselbe Dichte haben (7.20 bei 18° *C.*), und dafs ferner beide Zinkarten dieselbe Eigenschaft bewahren, wenn man sie auch in feine Feilspäne verwandelt hat, welcher Umstand schwer mit der vorausgegangenen Erklärung zu vereinbaren wäre. Es scheint daher, dafs der verkäufliche Zink mehr seiner Mischung mit heterogenen Substanzen, als seiner verschiedenen Dichte die Eigenschaft verdankt, von der verdünnten Schwefelsäure stärker angegriffen zu werden.

Um darüber ins Reine zu kommen, warf ich in eine Masse schmelzenden destillirten Zinks ein Neuntel seines Gewichts Eisenfeile; dasselbe that ich mit Zinn-, Kupfer- und Bleifeile, und erhielt so vier Cylinder, deren jeder aus einer Mischung von 9 Theilen reinen Zinks und 1 Theile eines fremden Körpers bestand. Ich will diese vier Cylinder, um einen vom andern zu unterscheiden, mit Eisenzink, Bleizink, Zinnzink und Kupferzink bezeichnen.

Die Cylinder wurden gleich tief und bei derselben Temperatur, so wie auch die aus destillirtem und verkäuflichem Zink, in die Lösungen Nr. 1., Nr. 2., Nr. 3. getaucht, und auf gleiche Weise die Zeit bemerkt, welche zur Erzeugung von 300 Millimetern Gas nöthig war. Die folgende Tafel zeigt die erhaltenen Resultate:

	Destillirter Zink.	Zinnzink.	Bleizink.	Kupferzink.	Eisenzink.	Verkäuflicher Zink.
Mit der Lösung Nr. 1. (Temperatur 10° *C.*)	3′ 27″	24″	12″	4″ — 6″	4″	4″
Mit der Lösung Nr. 2. (Temperatur 10° *C.*)	1′ 50″	12″	9″	6″	3″	3″
Mit der Lösung Nr. 3. (Temperatur 15° *C.*)	0′ 30″	12″	10″	3″ — 4″	2″ — 1″	2″ — 1″

Wir sehen, dafs jene Mischung, die beim verkäuflichen Zink die stärkste Gasentwicklung erzeugt, es auch bei den übrigen Zinkarten thut; dafs ferner in Rücksicht auf die Intensität der chemischen Wirkung die Ordnung der Zinkarten für jede Mischung der Säure dieselbe, und zwar von der angefangen, welche die schwächste Wirkung zeigt, folgende ist: destillirter Zink, Zinnzink, Bleizink, Kupferzink, Eisenzink, verkäuflicher Zink. Zinnzink und Bleizink unterscheiden sich wenig von einander, und eben so bringen Eisenzink und der verkäufliche Zink beinahe dieselbe Wirkung hervor. Noch ist zu bemerken, dafs für alle Zinkarten, mit Ausnahme des Kupferzinks, die Entwicklung anfänglich am langsamsten vor sich ging, dann allmählich wuchs, und mehr oder weniger rasch, nach der Beschaffenheit des Zinks, das Maximum der Geschwindigkeit erreichte. Beim Kupferzink hingegen nahm die Entwicklung beständig ab, was man einer schwärzlichen Oxydschichte zuschreiben kann, die sich auf die angegriffene Fläche absetzte, und die stärkere Einwirkung der Flüssigkeit hinderte; denn sobald man diese feuchte und lose

haftende Schichte wegnahm, begann die Gasentwicklung mit neuer Kraft, bis sich, was bald geschah, eine neue solche Kruste gebildet hatte.

Ich untersuchte auch die Erscheinungen, die aus einer fortgesetzten Einwirkung der Schwefelsäure auf die verschiedenen Zinkarten entspringen, und brachte zu dem Ende kleine, gleiche Cylinder in Gläser, die mit Auflösungen verschiedener Concentration Nr. 1. und Nr. 6. gefüllt waren. Bei Nr. 1. war die Wirkung sehr stark auf verkäufliches Eisen- und Kupferzink, allein hatte in 24 Stunden aufgehört. Es hatte sich ein Zinkvitriol gebildet und ein schwärzliches Pulver abgesetzt, das wahrscheinlich ein Oxyd der dem Zink beigemischten Substanz ist. Um vieles schwächer war die Wirkung auf destillirtes Blei- und Zinnzink, schien jedoch während der acht Tage, als sie dauerte, stets an Intensität zuzunehmen. Bei der viel weniger verdünnten Lösung Nr. 6. war die Wirkung auf alle Zinkarten schwach, jedoch bei allen fast gleich, ja man könnte sagen etwas stärker bei denen, die von der verdünnten Säure stärker angegriffen worden waren. Als am Ende einer bestimmten Zeit die Wirkung ganz aufgehört hatte, fand man, daſs bloſs der destillirte Zink sich vollkommen aufgelöst hatte, ohne einen Rückstand zu geben; die Flüssigkeit war vollkommen klar und durchsichtig; die andern Zinkarten hatten jede einen Rückstand hinterlassen, im Verhältnisse der Beschaffenheit der mit ihnen gemischten Substanz.

Da wir nun den Einfluſs der Beimischung anderer Substanzen zu einem Zink auf das fragliche Phänomen dargethan haben, handelt es sich um die Erklärung desselben. Es scheinen aber alle Umstände dafür zu sprechen, daſs es aus einer electrischen oder vielmehr electrochemischen Einwirkung entspringe.

Zuerst zeugt dafür der Einfluſs selbst, den die Gegenwart eines heterogenen, dem reinen Zinke beigemischten Metalls auf die Wasserzersetzung und Hydrogenentwicklung nimmt.

Zweitens sind eben jene Mischungen, die bei den verschiedenen Zinkarten die stärkste Gasentwicklung hervorrufen, auch diejenigen, so die besten Leiter der Electricität sind. Untersuchungen nämlich, deren nähere Erörterung nicht hieher gehört, und auf die ich nächstens bei einer allgemeinern Untersuchung über die Leitungsfähigkeit für Electricität und die darauf Einfluſs nehmenden Umstände zurückkommen werde, haben mir dargethan, daſs sehr verdünnte Schwefelsäure stets besser leite als sehr concentrirte, daſs die am besten leitenden Mischungen jene wären, die in 100 Gewichtstheilen wenigstens 30 und höchstens 50 Gewichtstheile Schwefelsäure enthalten, und daſs endlich unter diesen die oben unter Nr. 3. und Nr. 4. angeführten Lösungen, insbesondere aber Nr. 3. die gröſste Leitfähigkeit besitze.

Endlich bestätiget meine Hypothese die bekannte Erscheinung, daſs die Wasserzersetzung ungemein (über das Doppelte) gesteigert wird, wenn man mit dem in der verdünnten Schwefelsäure stehenden Zinke eine ebenfalls in jene getauchte Platinstange in metallische Verbindung setzt. Um diesen Versuch dem Falle, wo das Zink mit einem heterogenen Metalle gemischt ist, näher zu bringen, kann man den Zinkcylinder mit Platindrähten der Länge nach oder ringförmig umspinnen, oder noch besser an verschiedenen Puncten seiner Oberfläche kleine Platinspitzen von 3 — 4 Millimeter Länge einsetzen; stets ist die Menge des entwickelten Gases viel beträchtlicher, als die unter gleichen Umständen isolirter Zink erzeugt.

Aus dem Vorausgegangenen erhellet, daſs man den Vorgang beim Zink, das mit fremden Substanzen gemischt ist, als analog dem Falle betrachten kann, wo das Zink mit Platindrähten umwunden ist. Die geringe chemische Einwirkung, die bei reinem Zink Statt findet, erregt daselbst einen electrischen Strom, der zwischen jedem Zink- und jedem dasselbe berührenden heterogenen Metalltheilchen eintritt. Diese kleinen Molecularströme zersetzen das Wasser, das sie durchstreichen, tragen das Hydrogen auf das heterogene, in allen von uns betrachteten Mischungen negative Metalltheilchen, und das Oxygen auf das positive Zinktheilchen; sobald dieses sich oxydirt, verbindet es sich mit der Schwefelsäure zu einem im Wasser löslichen Vitriole. Je stärker diese Molecularströme sind, desto rascher geht die Gasentwicklung von Statten; nun aber hängt die Intensität dieser Ströme von der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit ab, und hieraus ist erklärbar, warum diese auf die Gasentwicklung einen so groſsen Einfluſs hat. — Diese Intensität sollte zwar auch von dem Unterschiede der Oxydirbarkeit des Zinks und des mit demselben verbundenen Metalls abhängen, allein nichts desto weniger findet nicht beim Kupfer-, sondern beim Eisenzink die stärkste Gasentwicklung Statt. Jedoch bedenke man, daſs die Intensität eines Stromes auch von der Leichtigkeit abhänge, mit welcher er von dem negativen Metall in die leitende Flüssigkeit übergeht, und daſs dieser Übergang weit leichter vom Eisen zur Schwefelsäure, als vom Kupfer in dieselbe erfolge. Ferner erwäge man, daſs die Wirkung beim Kupferzink in den ersten Momenten viel stärker als später, ja manchmal selbst stärker als gleichzeitig beim Eisenzinke ist. Dieses rührt, wie wir erwähnten, von dem schwärzlichen, bald nach Beginne der Wirkung auf das Kupferzink sich absetzenden Pul-

ver her, das, wie ich mich überzeugte, nichts anderes als schwach oxydirter Zink ist, der aus der Zersetzung des in der Flüssigkeit schon aufgelösten Zinkvitrioles kommt, welche Zersetzung in Folge der von den Zink- zu den Kupfertheilchen gehenden Ströme eintritt.

Die Eisenzink-Elemente hingegen, die eine viel geringere electrische Kraft als die Kupferzink-Elemente besitzen, vermögen wohl das Wasser, aber nicht das Zinkvitriol zu zerlegen, daher bei den erstern die Gasentwicklung nicht aufhört, sondern im Gegentheile immer mehr zunimmt, während bei den zweiten sie immer schwächer wird, wenigstens so lange man nicht die an ihre Oberfläche sich absetzende Kruste wegnimmt.

Aus demselben Grunde entsteht auch die nach einigen Augenblicken eintretende analoge Verminderung der Entwicklungsgeschwindigkeit, die man an destillirtem, mit einem oder mehreren Platindrähten in Berührung stehendem Zinke bemerkt. Auf der Oberfläche dieser Drähte setzt sich nämlich ebenfalls ein Zinkoxyd ab, das aus der Zersetzung des Zinkvitriols entstand, und nach und nach die Wirkung des negativen Elementes aufhebt. Wechselt oder reinigt man die Platindrähte, so sieht man gleich darauf das Spiel mit der ersten Lebhaftigkeit wieder beginnen.

Nun sind die Verschiedenheiten, die sich zwischen dem destillirten und dem verkäuflichen Zinke zeigen, leicht erklärbar. Letzteres enthält, wie die vom Prof. *de la Planche* angestellte Analyse lehret, einige Spuren von Zinn, Blei, mehr als ein Procent Eisen und ziemlich viel Kadmium; nun aber habe ich mich überzeugt, dafs die Gegenwart nicht blofs von 10 Procent, sondern schon von 2 Procent Eisen hinreiche, damit eine Zinkmischung in den verschiedenen Lösungen fast eben so viel Gas entwickle, als das verkäufliche Zink, so dafs

gar kein Zweifel übrig bleibt, daſs bloſs die Gegenwart der fremden Stoffe, insbesondere des Eisens im letztern, die bedeutende chemische Wirkung, die es erzeugt, veranlasse. Auf gleiche Weise kann man auch erklären, warum destillirtes Zink, wenn die chemische Wirkung schon einige Stunden gedauert, stärker angegriffen werde, als beim Beginne der Operation. Die Oberfläche nämlich wird ein wenig oxydirt, und die Gegenwart des Oxydes spielt hier dieselbe Rolle, wie oben die eines heterogenen Metalls. Aus demselben Grunde wird die Gröſse der Wirkung gesteigert, wenn man das Zink öfters aus der Flüssigkeit herauszieht, und der Luft aussetzt; was sich leicht aus der Oxydation, die der feuchte Zink in Berührung mit der atmosphärischen Luft erleidet, erklären läſst.

Die Temperaturerhöhung, die aus der Einwirkung der Flüssigkeit auf die verschiedenen Zinkarten entspringt, und die desto gröſser ist, je lebhafter letztere auftritt, scheint sie nicht auch dem Einflusse dieser Molecularströme zuzuschreiben zu seyn? Andere Versuche über den erwärmenden Einfluſs der Electricität auf Flüssigkeiten, deren Auseinandersetzung mich hier zu weit führen würde, scheinen mit dieser Ansicht ganz in Übereinstimmung zu seyn.

Noch einige meine Behauptung über die Existenz der erwähnten Molecularströme bekräftigende Thatsachen darf ich nicht übergehen. Sie betreffen die electromotorische Kraft der verschiedenen Zinkarten. Bringt man je zwei und zwei nach einander an die Enden des Galvanometers, und taucht sie in sehr verdünnte Schwefelsäure (die Lösung Nr. 3.), so kann man sie in folgende Reihe bringen, wo sich jede positiv gegen die folgende verhält: Destillirtes, Blei-, Zinn-, Eisen-, verkäuflicher und Kupferzink. Die Intensität der von ihnen er-

regten Ströme ist sehr wandelbar, und hängt von der besondern Beschaffenheit der jedesmal mit einander combinirten Zinkarten ab. Bildet man eine Kette aus einer Kupferplatte und je einer der verschiedenen Zinkarten, so findet man, dafs das destillirte, das Blei- und Zinnzink den stärksten Strom von 80°, das verkäufliche und das Eisenzink einen von 75°, und das Kupferzink einen von 18° gebe.

Also weder die Reihenfolge der electromotorischen Kräfte dieser verschiedenen Zinkarten, noch die Intensität der von ihnen erregten Ströme steht in Beziehung mit der Stärke der von der Schwefelsäure auf sie ausgeübten Wirkung, denn die weniger angegriffenen verhalten sich positiv gegen die mehr angegriffenen, und geben mit demselben negativen Metall stärkere Ströme. Diefs kann nur davon herrühren, dafs der Strom, den der Galvanometer anzeigt, durch die unmittelbar auf das positive Element des Plattenpaares ausgeübte electrische Wirkung, die Hydrogennntwicklung aber durch die kleinen Ströme hervorgebracht wird, die zwischen den Zink- und den heterogenen Theilchen obwalten. Die erst erwähnte unmittelbare Einwirkung mufs aber stärker beim reinen Zink als bei einer Mischung von Zink und weniger oxydirbaren Metallen seyn, und je weniger oxydirbar diese Metalle sind, desto tiefer wird der sie enthaltende Zink in der positiven Reihe stehen. Diese Unterscheidung kann, meines Dafürhaltens, mehrere anscheinende Anomalien beheben und darthun, wie schwer es sey, die wahre Intensität der chemischen Wirkung zu schätzen, die eine Flüssigkeit auf einen Körper ausübt.

3. Über ein Verfahren, Mangan und Blei aus den Lösungen, in denen sie sich vorfinden, auf electro-chemischem Wege zu gewinnen. Von *M. Becquerel.*

(Ann. de Chim. et de Phys. Avril 1830, *p.* 380.*)*

So oft man mittelst der Säule Lösungen von zusammengesetzteren Bestandtheilen zersetzt, erhält man an den Polen keine einfachen, sondern Körper von höheren Verbindungsstufen: will man diese analysiren, so muſs man sie von Neuem dem electrischen Strome aussetzen, und die Glieder der Säule und deren Reihenfolge mannigfach abändern, bis es endlich gelingt, die Stärke des Stromes und die Verwandtschaftskräfte so abzumessen, daſs der gesuchte Körper allein, für sich, an einem Pole erscheint. Wie man nun zu Werke zu gehen habe, um Blei und Mangan aus den Verbindungen, in denen sie sich vorfinden, auszuscheiden, oder wenigstens ihre Gegenwart zu erkennen, lehrt diese Abhandlung.

Man gieſse in eine Porzellanschale eine Auflösung von essigsaurem Eisen- und Manganoxyd, letzteres in äuſserst geringer Menge ($^1/_{1000}$ Gramm reicht hin), und tauche zwei Platinstreifen hinein, deren jeder mit einem Pole einer gewöhnlichen Säule in Verbindung steht. Alsogleich tritt Wasserzersetzung und Gasentwicklung ein, das Oxygen auf seinem Wege zum positiven Pole überoxydirt das Mangan, das die Essigsäure verläſst, und sich als ein schwarzes Pulver auf den positiven Platinstreifen absetzt.

Nichts ist einfacher, als auf diesem Wege Mangan von Eisen zu trennen; man löse nur diese Metalle in Essigsäure oder auch in Schwefel- und Salpetersäure (in welcher das Manganperoxyd ebenfalls unlöslich ist) auf, und nehme hinlänglich groſse Streifen und eine energi-

sche Säule, damit der Versuch schnell genug von Statten gehe. Wenn man mit einer kleinen Menge operirt, so ist man in einigen Stunden fertig, besonders wenn man die Vorsicht braucht, das abgesetzte Peroxyd von Zeit zu Zeit vom Platinstreifen abzunehmen. Wenn die Lösung ein Gramm Mangan enthält, benöthiget man 24 und noch mehr Stunden; allein, wie gesagt, die Zeit hängt von den Dimensionen der Streifen und von der Spannung der Säule ab. Wenn der Streifen sich nicht mehr färbt, so kann man sicher seyn, daſs die Lösung kein Mangan mehr enthält, oder wenigstens eine kaum merkliche Menge, da $^1/_{1000}$ Gramm Mangan in 1 Gramm Wasser aufgelöst durch dieses Verfahren sich zu erkennen gab.

Will man den eigentlichen Hergang der Sache recht erkennen, und zugleich einen überraschenden Versuch anstellen, so bediene man sich einer Säule mit geringer Spannung, und beobachte das Verfahren, das *Becquerel* anfänglich gewählt hat: In eine mit einer Lösung von essigsaurem Kupfer gefüllte Schale steckt man eine Röhre, die unten mit Thon, der mit einer Lösung von essigsaurer Soda angefeuchtet ist, verstopft, oben mit einer Lösung von essigsaurem Eisen gefüllt ist; in letzteres reicht ein Platin-, in die salpetersaure Kupferlösung ein Kupferstreifen, der erste mit dem positiven, der andere mit dem negativen Pole einer schwachen Säule in Verbindung. Wenn der Apparat zu wirken anfängt, zersetzt sich augenblicklich das so leicht trennbare salpetersaure Kupfer, das Kupfer reducirt sich auf dem Kupferstreifen, das Oxygen und die Salpetersäure werden zum andern Pole übergeführt, wo das Oxygen frei wird, während die Salpetersäure die Essigsäure aus ihrer Verbindung mit dem Eisen verdrängt. Da die Säule zu schwach ist, um die essigsaure Verbindung zu zersetzen und die

Überführung des Eisenoxydes zum negativen Pole zu bewirken, so bleiben alle Verbindungen, die sich gebildet haben, in der Röhre; der Platinstreifen bleibt so glänzend, wie vor dem Versuche. Nun gebe man in die Eisenlösung nur einen Tropfen essigsauren Mangan, alsogleich nimmt der Platinstreifen eine graue Farbe an; gibt man etwas mehr zu, so schwärzt er sich immer stärker, bis er endlich vollkommen schwarz wird, und das Manganperoxyd sich ganz abgesetzt hat. Offenbar dient hier das salpetersaure Kupfer wegen seiner grossen Zersetzbarkeit dazu, um den zur Überoxydirung des Mangans nöthigen Sauerstoff zu verschaffen, da die Säule zu schwach ist, um dieses durch Wasserzersetzung zu erzeugen.

Je länger die Manganentwicklung fortdauert, desto saurer wird die Flüssigkeit, so daſs sich zuletzt nur sehr wenig Eisenoxyd auf die negative Platte niederschlägt, da es zum Theile augenblicklich wieder reducirt wird. Wenn die Operation geendet ist, wäscht man diese Platte mit einer Säure, um die geringe Eisenmenge, die sich daran befindet, aufzulösen. Welche Metalle auch mit Mangan verbunden sind, stets kann man letzteres leicht sondern, so unter anderem trennt man Mangan und Zink, die auf dem gewöhnlichen chemischen Wege so schwer zu scheiden sind.

Manchmal färbt sich die Flüssigkeit gegen das Ende der Operation rosenroth, verliert aber diese Farbe einige Zeit hernach, als die Wirkung der Säule aufgehört hat; dieſs rührt daher, daſs die Säule eine reducirende Wirkung auf das Hyperoxyd ausübt, und eine geringe Menge des Salzes auf die niedrigste Oxydationsstuffe zurückzuführen sucht; allein wenn man im Versuche fortfährt, so zerstört man es wieder, und es verschwindet ganz aus der Lösung.

Man wende nie zu starke Säulen an, diese könnten die Essigsäure zersetzen und vielleicht Wirkungen hervorbringen, welche der Bildung des Manganperoxydes hinderlich wären. *Becquerel* bediente sich bei seinen Versuchen eines Trogapparates von 30 Plattenpaaren, 8 Centimeter Höhe und 6 Breite, und füllte ihn mit einer leichten Meersalzlösung, damit er längere Zeit in Wirksamkeit bleiben kann.

Die Trennung des Bleies von den andern Metallen fordert einige Modificationen im eben angezeigten Verfahren, die darin bestehen, daſs man nicht, wie oben geschah, die essigsauren Lösungen in eine Schale geben und die beiden Platinstreifen hineintauchen darf, weil das Bleioxyd leicht reducirbar ist, und daher das Metall gleich wie die andern in der Lösung befindlichen Basen sich an dem *negativen* Platinstreifen ablagern würde. Man bedient sich lieber des andern, früher nur bei einer Säule mit geringer Spannung angewendeten Verfahrens (S. 250), nur daſs man, weil da die Sache zu langsam vor sich ginge, statt jener eine Säule von gewöhnlicher Stärke anwendet. Da verhält sich das Blei wie das Mangan, d. h. es überoxydirt sich, und setzt sich auf der positiven Platinplatte ab. Oft ist das Peroxydhäutchen schwarz und krystallisirt, wenn man es aber zerreibt, erscheint wieder die schwarzbraune Farbe *(couleur puce)*. Durch dieses Mittel kann man die kleinsten Bleimengen, welche die heftigsten chemischen Reagentien, wie z. B. hydrothionsaurer Ammoniak, nicht zu erkennen gaben, bemerkbar machen und ausscheiden. Wie man das Peroxyd des Bleies von dem des Mangans unterscheiden könne, lehrt die Chemie, und bedarf hier keiner weitern Auseinandersetzung.

Bei der Ausmittelung des Bleies kann man statt des salpetersauren Kupfers auch essigsaures oder salpeter-

saures Silber mit Glück anwenden. Ein großer Vorzug dieser Methode besteht auch darin, daſs man alle die Manipulationen, die oft mehr oder weniger bedeutende Verluste in den Producten der Analyse hervorbringen, dadurch erspart.

Das hier Auseinandergesetzte zeigt, welchen Nutzen man aus der *Volta*'schen Säule für die chemische Analyse ziehen könnte, wenn man nur besser die electrochemischen Eigenschaften der einfachen Körper erforscht hätte. Neue Resultate werden diesen Untersuchungen, deren Anwendung für die Chemie gewiſs von Nutzen seyn muſs, eine gröſsere Ausdehnung geben.

Meteorologische Beobachtungen. April 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh. Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Um 3 Uhr Nachmittag. Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Um 10 Uhr Abends. Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Witterung.
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z,	Grad R.		
1	27.382	11.5	OSO. schw.	27.334	15.2	SO. schwach.	27.263	10.0	WSW. schw.	Sonne mit Wolken.
2	27 388	11.5	NW. schw.	27.370	15.2	SO. stark.	27.280	10.0	SW. schw.	Sonne mit Wolken.
3	27.277	9.7	W. still.	27.284	17.1	O. schwach.	27 372	9.5	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
4	27.558	13.0	W. stark.	27.545	17.8	W. still.	27.469	11 0	S. still.	Sonne mit Wolken.
5	27.472	8.0	NNW. schw.	27.509	4.5	NW. schw.	27.659	0.0	W. schwach.	Trüb, Regen, Schnee.
6	27.607	1.0	OSO. schw.	27.374	11.0	SO. mittelm.	27.399	6.0	WNW. schw.	Sonne mit Wolk. u Reg.
7	27.459	8.2	W. schwach.	27.516	12.0	W. schwach.	27.552	6.0	W. schwach.	Sonne mit Wolk u. Reg.
8	27.547	6.0	WSW. still.	27.467	14.3	OSO. schw.	27 467	9.3	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
9	27.397	9 0	OSO. schw.	27.206	14.0	S. schwach.	27 189	8.0	S. schwach.	Sonne mit Wolk., Gewit.
10	27.169	9.0	S. schwach.	27.019	18.0	N. still.	27.270	6.5	WNW. mitt.	Sonne mit Wolk., Sturm
11	27.422	8.0	WNW. mitt.	27.478	12.2	WNW. schw.	27.513	8.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
12	27.525	8.5	WNW. schw.	27.371	14.0	W. still.	27.293	9.0	W schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
13	27.258	9.0	W. stark.	27.274	13.0	WNW. stark.	27 273	8.0	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
14	27.244	7.5	WNW. stark.	27.273	5.0	W. stark.	27.380	4.0	W. mittelm.	Trüb, Regen.
15	27.504	6.0	W. stark.	27.506	8.0	WNW. mitt.	27.506	6.0	SO. still.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
16	27.503	5.0	W. still.	27.435	15.0	SO still.	27.435	10.0	SO. still.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
17	27.403	11.0	WNW. schw.	27.433	14.0	WNW. mitt.	27.442	10.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
18	27.451	12.0	SW. still.	27.435	15.0	WNW. schw.	27.412	10.0	W schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
19	27.402	11.9	NO. still.	27.219	13.0	SO. mittelm.	27.074	8.5	SO. mittelm.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
20	27.192	10 9	WNW. stark.	27.292	10.0	NW. s. stark.	27.347	7.0	WNW. stark.	Sonne mit Wolken.
21	27 262	4.0	WNW. Sturm	27.449	7.0	NW. Sturm.	27.503	5.8	NW mittelm.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
22	27.514	9 0	SO. schwach.	27.420	12.3	SO. still.	27.408	9.0	S. still.	Sonne mit Wolken.
23	27 333	10.0	S. still.	27.277	12.0	S. schwach.	27.280	8.0	S. schwach.	Regen und trüb.
24	27.333	9.5	SW. schw.	27.376	16.4	NNO. schw.	27 400	10.5	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
25	27.443	11.5	WNW schw.	27.480	14.0	NO. still.	27.566	10 0	W. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
26	27.636	9.2	WNW. schw.	27.653	11.2	NW. schw.	27.707	6 8	NW. schw.	Trüb.
27	27 746	8.0	N. mittelm.	27 691	14.0	NO. mittelm.	27.726	9 0	NNO. mitt.	Sonne mit Wolken.
28	27.793	8.2	NO. schwach.	27.775	11.8	NO. mittelm.	27.790	7.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
29	27 782	10.0	NNO. still.	27.732	15.5	NW. schw.	27.722	10.0	N. schwach.	Sonne mit Wolken.
30	27.711	8.8	N. schwach.	27.630	15.0	NW. still.	27.633	9.5	N. schwach.	Heiter.
Mittel	27.4571	8.83		27.4274	12.92		27.4443	8.08		

Meteorologische Beobachtungen. Mai 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		
1	27.587	9.0	N. still.	27.455	18.0	N. still.	27.422	12.0	N. schwach.	Heiter.
2	27.494	10.0	WNW. stark.	27.520	12.0	W. stark.	27.581	9.0	W. mittelm.	Trüb, Regen.
3	27.614	10.0	W. mittelm.	27.615	16 8	NW. schw.	27.519	10.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
4	27.660	9.3	WNW. schw.	27.667	12.0	NW schw.	27.703	8.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
5	27.710	8.2	NW. schw.	27.724	15.0	NW. schw.	27.772	9.3	NW. schw.	Heiter.
6	27.636	11.0	O. still.	27.635	15.0	O. schwach.	27.594	9 5	SO. schwach.	Heiter.
7	27.478	11.4	SO. still.	27.402	17.0	SO. stark.	27.358	10.0	SO. schwach.	Heiter.
8	27.290	11.4	NO. schwach.	27.257	19.0	NO. schwach.	27.204	10.0	N. schwach.	Sonne mit Wolken.
9	27.167	9.0	N. schwach.	27.154	13.0	W. schwach.	26.982	9.0	W. schwach.	Sonne mit Wolk., Gewit.
10	27.053	12.3	N. schwach.	27.065	14.5	W. stark.	27.232	6.0	W. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
11	27.240	7.0	WSW. schw.	27.206	13.5	O. mittelm.	27.262	9.7	W. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
12	27.364	9.2	WNW. mitt.	27.358	14.8	SSO. mitt.	27.369	10 5	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
13	27.419	10.9	SSO. schw.	27.411*	19.0	O. schwach.	27.430	11.0	SO. schwach	Sonne mit Wolken.
14	27 502	14.0	N. still.	27.500	19.4	NO. schwach.	27.615	13.0	N. schwach.	Sonne mit Wolken.
15	27.591	14.0	NW. schw.	27.582	20.0	SO. schwach.	27.613	12.5	NNW. schw.	Sonne mit Wolken.
16	27.562	14.0	NNO. schw.	27.524	16.0	WNW. schw.	27.559	9.0	NW. schw.	Trüb, Regen.
17	27.587	10.5	NW. schw.	27.561	11.7	NW. schw.	27.575	10 4	NW. schw.	Trüb.
18	27.599	11.5	NW. schw.	27.540	16.8	NW. schw.	27.550	11.7	W. still.	Sonne mit Wolken.
19	27.540	10.9	SO still.	27.452	18.0	OSO. schw.	27.409	13.0	SW. schwach.	Nebel, Sonne mit Wolk.
20	27.436	12.0	N. schwach.	27.419	17.0	WSW. schw.	27.469	13.8	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
21	27.502	12.0	N. schwach.	27.423	18.0	OSO. schw.	27.418	14.0	SO. schwach.	Heiter.
22	27.342	19.0	O. schwach.	27.420	21.5	NW. schw.	27.491	18.0	W. still.	Sonne mit Wolken.
23	27.530	15 0	WNW. schw.	27.528	21.2	NW schw.	27.631	17.1	SO. still.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
24	27.559	16.0	O. schwach.	27.514	21.3	OSO. schw.	27.485	17.1	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
25	27.410	19.0	OSO. mitt.	27.303	22.5	SO. stark.	27.351	15 0	W. stark.	Sonne mit Wolken.
26	27.397	19.0	O. still.	27.158	19.3	OSO. stark.	27.408	9.0	W. s. stark.	Sonne mit Wolk., Sturm
27	27.415	12.3	W. schwach.	27.331	8.5	NNW. schw.	27.305	6.8	W. schwach.	Trüb, Regen.
28	27.308	10.0	W. schwach.	27.304	15.0	W. schwach.	27.329	7.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
29	27.421	10.0	W. schwach.	27.482	12.5	WNW. mitt.	27.586	6.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
30	27.708	9.0	NW. mittelm.	27.692	13.0	NO. schwach.	27 662	8.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
31	27.662	10.0	SO. schwach.	27.661	18.3	OSO. schw.	27.802	9.0	W. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
Mittel	27.4769	11.84		27.4473	16.44		27.4705	10.79		

Meteorologische Beobachtungen. Juni 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad. R.		
1	27.884	12.8	WNW. schw.	27.832	16.0	NW. schw.	27.820	13.5	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
2	27.811	15.0	SO. still.	27.713	19.0	SO. schwach.	27.685	14.7	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
3	27.654	18.8	NO. still.	27.545	21.2	SO. still.	27.621	15.0	SO. still.	Heiter.
4	27.519	15.8	SSW. schw.	27.502	21.7	SO. mittelm.	27.524	15.5	SO. schwach.	Heiter.
5	27.598	18.0	SSO. still.	27.603	21.7	SO. mittelm.	27.601	16.0	SO. schwach.	Heiter.
6	27.611	19.0	SO. schwach.	27.536	23.0	S. mittelm.	27.565	16.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
7	27.590	17.4	NW. schw.	27.525	21.4	SO. schwach.	27.486	17.8	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
8	27.490	16.7	NNW. schw.	27.386	23.5	SO. mittelm.	27.411	17.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
9	27.423	18.0	SO. schwach.	27.356	23.7	OSO. stark.	27.413	17.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
10	27.490	16.0	SO. schwach.	27.412	22.2	OSO. still.	27.438	14.5	NW. schw.	Sonne mit Wolk., Gewit
11	27.430	14.0	W. stark.	27.439	16.2	WNW. stark.	27.495	12.0	WSW. mitt.	Sonne mit Wolk u. Reg.
12	27.511	13.2	WNW. mitt.	27.468	17.2	NW. schw.	27.434	15.0	W. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
13	27.393	16.2	O. schwach.	27.340	17.0	NW. schw.	27.305	10.0	NW. schw.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
14	27.312	10.5	WNW. schw.	27.246	15.4	WNW. stark.	27.252	11.0	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
15	27.257	11.7	SW. schw.	27.212	10.0	S. mittelm.	27.241	8.0	S. schwach.	Trüb, Regen.
16	27.283	12.0	WNW. schw.	27.263	16.0	O. schwach.	27.197	11.0	N. mittelm.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
17	27.158	9.0	W. s. stark.	27.345	13.4	NW. stark.	27.417	10.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
18	27.423	12.0	OSO. schw.	27.367	18.2	SSO. still.	27.353	14.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
19	27.342	15.0	SO. schwach.	27.317	14.0	WNW. schw.	27.358	10.0	WNW. schw.	Trüb, Gewitter.
20	27.382	12.0	WNW. schw.	27.348	19.0	WNW. schw.	27.324	12.0	W. schwack.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
21	27.266	14.0	WNW. schw.	27.157	16.0	NNO. still.	27.183	11.3	W. schwach.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
22	27.185	16.2	S. still.	27.121	21.0	SSO. stark.	27.144	12.0	W. stark.	Sonne mit Wolken.
23	27.214	14.2	WNW. schw.	27.326	16.7	WNW. stark.	27.501	13.0	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
24	27.556	14.0	WNW. schw.	27.534	20.0	N. still.	27.546	14.5	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
25	27.582	15.0	OSO. still.	27.514	21.4	S. mittelm.	27.442	14.8	O. schwach.	Heiter.
26	27.496	15.0	W. still.	27.477	23.9	SO. mittelm.	27.481	18.7	SO. schwach.	Heiter.
27	27.460	19.0	SO. mittelm.	27.341	23.9	O. stark.	27.356	18.3	SO. schwach.	Heiter.
28	27.492	14.0	WNW. still.	27.485	18.0	WNW. mitt.	27.639	15.0	NW. schw.	Regen, Sonne mit Wolk
29	27.540	17.0	NW. schw.	27.504	21.0	NW. still.	27.525	17.5	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
30	27.527	19.0	NO. still.	27.411	23.2	OSO. mitt.	27.438	14.0	WNW. schw.	Sonne mit Wolk., Gewit.
Mittel	27.4626	15.02		27.4175	19.16		27.4332	13.98		

Fig. 6.

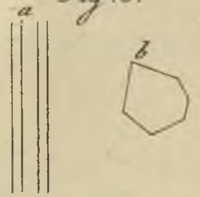


Fig. 8.

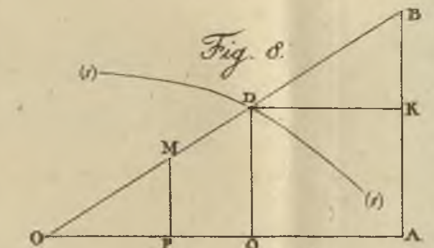


Fig. 9.

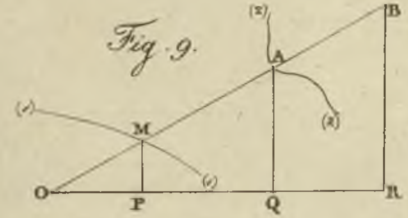


Fig. 7.

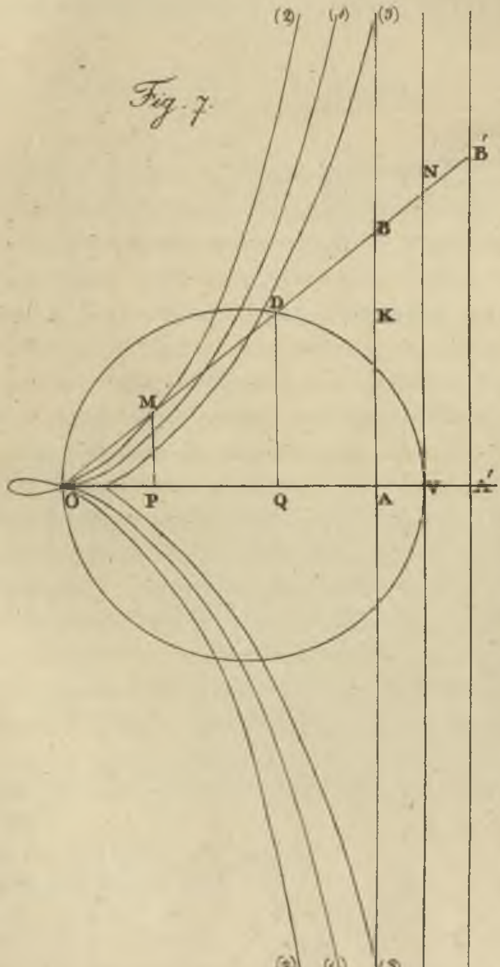


Fig. 10.

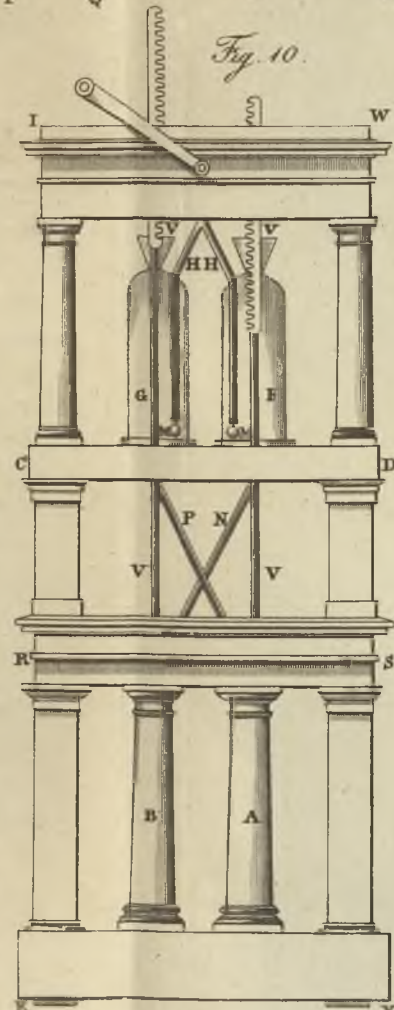


Fig. 11.

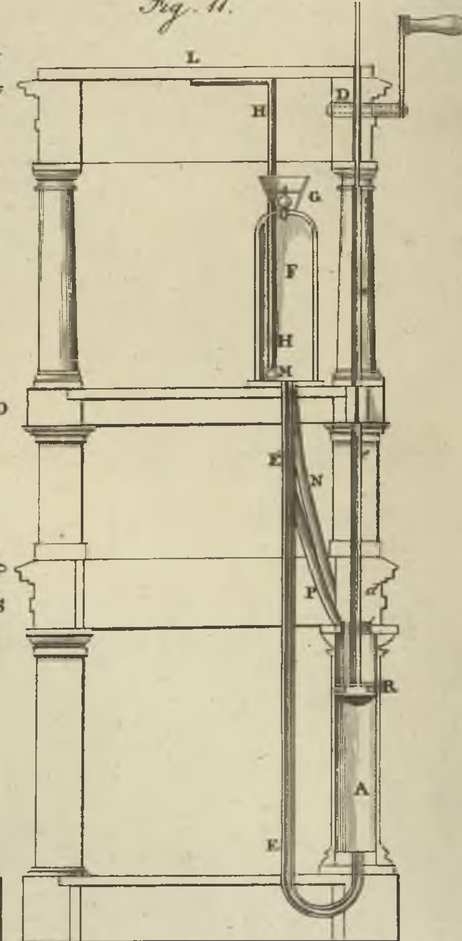


Fig. 12.



Fig. 13.



Fig. 14.

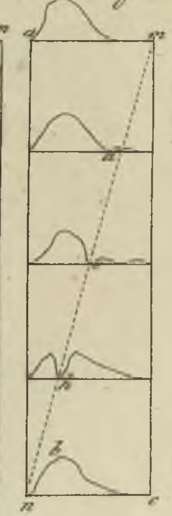


Fig. 15.



Fig. 16.

